前　言

虽说写这本书的念头是近几年才有的，但本书体系的形成却经历了差不多 30 年。

作者在这领域早期受到 A. E. Green 和 W. Zerna 的《理论弹性》(1954) 和 S. Gołąb 的《张量运算》(1956) 的启蒙。Gołąb 教授是属于 Schouten 学派的。尽管有些作者还没有意识到，“芯字母”和“带撇指标”在指标记法中却早已决定性地显示出它们的优越性。

1960 年，C. Truesdell & R. A. Toupin 的《经典场论》问世。作者的导师 W. Urbanowski 教授对作者说，指标固然好，但抽象记法更佳。老师的思想感染了学生。作者在波兰发表的 22 篇论文全是本着这个精神写的。

1963 年作者回国在北大任教。当时国际学术界使用张量方法的尚属少数。但作者的信念是：张量的普及只是时间问题。作者讲授的“非线性弹性理论”固然非用张量不可。对基础课“弹性力学”，作者也尝试了用笛氏张量记法讲授。从未受过这方面训练的学生感到困难。教学效果如何作者也无把握，感到压力很大。作者采取了发补充讲义和加强辅导等措施设法将课坚持到底。学期终了，克服了重重困难的学生终于尝到了甜头，反映说：“这种方法就是好！”学生的肯定是对教师的最大支持和鼓励，增强了作者在教学上沿这路子走下去的信心。但是，“十年动乱”使作者的想法成了泡影，只留下了一本用张量书写的“非线性弹性理论”讲义。

雨过天晴。翻开杂志一看，果然不出所料，几乎每篇理论性文章无一不在不同程度上用了张量的工具。1978 年，作者参与了“全国力学规划”中的“理性力学和力学中的数学方法”部分的工

作. 原来的想法死灰复燃了. 遂修改了留下的讲义,出版成书《非线性弹性理论》.

过去主要是固体和流体力学工作者应用张量分析，而且仅是三维欧氏空间的张量分析. 这是很自然的，因为物体仅在三维的物理空间运动.

正当我们"内战"正酣的时候，国际上兴起了一门"新几何力学". 突破口在 Hamilton 力学. 它需要在构形空间，相空间或增广相空间中进行张量分析，从中发掘每个系统的最本质的数学结构——自然辛结构. 这些空间已经不是我们生活所在的物理空间，而是高一层的抽象空间，维数可以是任意的. 当讨论连续体时,维数还是无穷的. 这就要求人们跳出狭窄的三维物理空间,转入抽象的 n 维，甚至无穷维空间，对于约束系统来说,则是流形. 一般情况下,系统或多或少是受到约束的. 这样,张量分析就从古典阶段进入近代阶段——流形上的张量分析. 流形的维数可以是任意的,坐标系一般只是局部的,与之相伴又产生了一系列的新概念,接受这些概念需要在观念上来一个大转弯. 1979 年起作者有机会到外面走一走，所接触到的新朋旧友，许多都谈到这个新阶段.

本书的原始意图是一本入门读物，但入门也有现代化问题. 古典张量分析的书已出版甚多,大同小异,多一本少一本已无关大局. 作者把前面谈及的几个阶段的思想有机地加以融合，经反复酝酿下，最后决定把这本书写成一本现代化的古典张量分析的入门书. 从整体上是古典的,因为本书未进入流形和无限维领域. 但从局部上,每一概念的叙述和定理的证明却尽可能是现代化的. n 维的空间,作为多重线性函数的张量定义,抽象记法的突出,置换,行列式及外代数的普遍使用等等使得全书的叙述和证明成为一个有机的整体,克服了古典分析中的一些逻辑上的不彻底性. 第 IX 章集中介绍一些主要的近代概念，旨在为读者架起一座较易通向近代张量分析的桥梁. 第 X 章举出非完整力学系统作为第 IX 章概念应用的生动例子. 读者从这个例子将会预感到近代分析的生

命力.

由于 Stokes 定理涉及流形的许多概念,本书没有介绍这个极为重要的定理，这是一个不得已的美中不足.

全书的各部分内容包含了作者各阶段的研究心得. 从 79 年起作者在国内外曾多次讲授过，书稿几经修改. 学生的问题和建议使本书得以不断完善. 这里作者想特别提到他的研究生慕小武和高普云同志.

科学出版社《应用数学和力学丛书》主编钱伟长教授有意将本书列入丛书. 种种原因，迟迟未能完稿. 正是他的一再督促使作者下决心趁暑假完成这项工作.

正在本书完稿之际，噩耗传来，8 月 23 日波兰学派的创始人之一，W. Nowacki 教授与世长辞了. W. Urbanowski 教授则在作者博士论文答辩后两个月就逝世了. 这两位记忆犹新的波兰恩师的学术思想,严谨作风和谆谆教导影响着作者的整个学术生涯. 请允许作者在这里一表怀念他们之意.

郭仲衡

(Guo Zhong-heng)

1986 年 9 月

于北京大学

目　录

绪　　论

作为一门数学学科，起初称作"绝对微分学"的张量分析的发展差不多已有一百年历史了．张量的概念源于描述弹性体的应力状态．但弹性力学，或更一般地，连续介质力学真正拿起这个武器还是近二、三十年的事(参阅理性力学先驱的经典文献：C. Truesdell, The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **1** (1952), pp. 125—300)．从那时起，张量分析在力学理论工作者中普及，已成为一个不可阻挡的趋势．力学的近代理论性文献都不同程度地运用这个工具．在应用张量分析方面，理论物理走在力学的前面．远在本世纪初，Einstein 成功地提出广义相对论，在相当程度上归功于这个有力的数学工具．今天，熟悉这个工具已是应用科学工作者的当务之急．本书正是为他们而写的．

提起张量运算，人们自然地就联想到一连串的"指标运算"，它在省去和号的 Einstein 约定下，神秘地把冗长的公式变得简洁和紧凑，并突出了现象的几何和物理特点．这是一大优点．但使张量分析获得成功的实质是在于它的不变性，即不随坐标系的选择而变化的性质．在处理具体问题时，我们总得引进坐标系，例如直角坐标系或其他曲线坐标系．众所周知，同一物理法则在不同坐标系里具有完全不同的形式，例如可以描述许多物理现象的 Laplace 方程在直角坐标系里是 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，在圆柱坐标系里是 $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$，而在球坐标系里则更为复杂．我们说，这些方程不具有(与坐标系无关的)不

变性．原因是：一个坐标系好比一种“面纱”，它蒙在上面使我们看不清物理事实的本质．张量分析的目的在于寻求一种摆脱具体坐标系影响的描述几何和物理规律的手段及其运算法则．

乾脆抛弃坐标系是一个办法，就是所谓“抽象记法”．只运用标量和向量的一些力学分支，所谓“向量力学”，就属于这种方法．它的简洁形式曾有过很大吸引力．意大利学者们曾试图将抽象记法推广到比向量更复杂的二阶张量的场合．他们引进了一大套难以记忆和掌握的运算法则，因此该方法未能普及．另一种办法就是“指标记法”，它辩证地既用坐标系而又摆脱坐标系的影响．它的简单的“指标游戏”法则易于掌握和记忆，使它赢得了广泛的承认．但指标记法也有弱点．除了在指标过多时显得累赘外，这方法在逻辑上有许多不透彻之处，而且每一步，严格地说，都应有烦琐的不变性证明．为了克服这些弱点，近代的倾向又重新回到“抽象记法”，或叫“不变性方法”．但这并非历史的简单重现，而是吸收其他数学分支的思想，克服自身的初期弱点而完成的一个质的飞跃，它使理论具有一个完整体系而趋于更成熟．近代张量运算的另一个重要特点是在微分流形上进行分析，它是近代微分几何的基本工具，为研究近代自然科学理论展现出新的和广阔的前景．

由于本书的预定对象和篇幅的限制，我们在这里不准备进行这种最一般的讨论． 但我们也不重复现有坊间书籍的古老做法，而是争取在不用过多的数学基础知识的前提下，使叙述尽可能简单而现代化，从而构成一个完整的理论体系，同时又易于为初学者所接受．

我们生活及周围自然现象发生所在的场所是三维欧氏空间．本书是为讨论在这空间里的自然现象提供工具，并举力学的若干方面作为应用范例． 但我们仍从建立一般的 n 维空间理论入手，而把三维空间作为特殊情形包括进去．这样，理论上可以简洁和透彻些，也为进一步深造打下基础．

本书采用的公式编号和引用法则如下．公式在本节范围内一律用一个数依次编号．在本章内引用时，前面添一个表示节号的

数，如(5.8)．在章外引用时，再在前面添一个表示章号的罗马数字，如(III. 4. 2)表示第III章§4的公式(2)。

作者不准备列举浩瀚的参考文献，而只在书末给出写稿中主要参考的文献(专用于第X章)和书目(适用于全书)。

第Ⅰ章　准　　备

§1　三维欧氏空间的笛氏张量记法

设在三维欧氏空间有直角坐标系 $\{x, y, z\}$. 按习惯，它的单位基向量组是 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 或 $\{\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z\}$. 任意向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 可表为

$$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i}_x + u_y\boldsymbol{i}_y + u_z\boldsymbol{i}_z,\quad \boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i}_x + v_y\boldsymbol{i}_y + v_z\boldsymbol{i}_z. \tag{1}$$

省去通常的点"·",我们简单地用并列表示两向量的点积

$$\boldsymbol{uv} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z. \tag{2}$$

标量场 $f(x, y, z)$ 的梯度和向量场 $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ 的散度分别是

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{i}_z, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{4}$$

如果有描述变形体每点应力状态的应力张量场

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

则在静力学问题里，该场应满足平衡方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

熟知的奥高公式是

$$\int_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) dV = \oint_S [u_x \cos(\boldsymbol{n}, x)$$

$$+ u_y \cos(\boldsymbol{n}, y) + u_z \cos(\boldsymbol{n}, z)]dS, \tag{7}$$

其中 V 是积分区域，S 是其边界。

这些常见的很有规律的普通公式书写起来已经显得有点累赘。如果要完整地讨论，例如，弹性力学问题，我们还要遇到麻烦得多的公式。

只要将符号略加改变，并引进两个约定，即可消除这些累赘。做法如下：将直角坐标系及其基向量组改记为 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\}$，或

$$\{x_i | i = 1, 2, 3\} \text{ 和 } \{\boldsymbol{i}_i | i = 1, 2, 3\} \tag{8}$$

1.1 取值约定 指标从 1 至 n 取值。

n 是空间维数，这里 $n = 3$。这样，(8) 式的取值范围 $i = 1, 2, 3$ 就可省去而成 $\{x_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{i}_i\}$。如果向量 $\boldsymbol{u}$ 在 x_i 轴方向的分量记为 u_i，$\boldsymbol{v}$ 为 v_i，则 (1) 式变成

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i}_1 + u_2\boldsymbol{i}_2 + u_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{i}_i, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i}_1 + v_2\boldsymbol{i}_2 + v_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{i}_i. \tag{10}$$

这里我们发现一个规律：上两式均对重复一次的下标求和。

1.2 求和约定 对重复一次且仅一次的指标从 1 至 n 求和。

这时 (9)，(10) 两式又可略去和号而写成

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{i}_i, \quad \boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{i}_i, \tag{11}$$

而两向量的点积就简化为

$$\boldsymbol{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_iv_i = u_iv_i. \tag{12}$$

类似地，(3)，(4) 式成为

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3, \tag{13}$$

$$\text{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \tag{14}$$

如果进一步用( ),$_i$ 表示偏导数$\dfrac{\partial()}{\partial x_i}$，而逗号后的字母也看作服从上述约定的下标，则更简单地有

$$\mathrm{grad}f = f_{,1}\boldsymbol{i}_1 + f_{,2}\boldsymbol{i}_2 + f_{,3}\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} f_{,i}\boldsymbol{i}_i = f_{,i}\boldsymbol{i}_i, \tag{15}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = \sum_{i=1}^{3} u_{i,i} = u_{i,i}. \tag{16}$$

类似于向量分量的下标记法，把应力张量记成

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{或}\ (\sigma_{ij}), \tag{17}$$

则平衡方程变成

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \end{aligned}\right\} \text{即} \left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{1j,j} = 0, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{2j,j} = 0, \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{3j,j} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

应用两个约定，复杂的平衡方程 (6) 最终可写成

$$\sigma_{ij,j} = 0. \tag{19}$$

奥高公式的各方向余弦 $\{\cos(\boldsymbol{n}, x), \cos(\boldsymbol{n}, y), \cos(\boldsymbol{n}, z)\}$ 实际上是积分区域边界单位外法向 $\boldsymbol{n}$ 的分量 $\{n_x, n_y, n_z\}$，按现在的记法就是 $\{n_i\}$，于是 (7) 就变成

$$\int_V u_{i,i} dV = \oint_S u_i n_i dS. \tag{20}$$

这里出现两种指标：不重复的指标(即**取值指标**)称为**自由指标**，重复的指标(即**求和指标**)称为**哑指标**。哑指标可以任意代换，例如 $u_j v_j = u_i v_i$。 上面这些只是所谓"三维欧氏空间的笛氏张量运算"的某些片断，是引进两个约定改写熟知公式的结果。虽然没有实质性的新内容，但已部份地显出它的优越性。

现在问题是：从一个直角坐标系转换至另一个直角坐标系或斜角坐标系(即仿射坐标系)，甚至任意的曲线坐标系时，情况又将如何？这些问题的解决将是本书第一部分的基本内容.

为了使理论上更透彻、叙述上更一般，以后我们将讨论 n 维空间（n 可为任意正整数）. 三维空间是特殊的，特殊之处将在相应的地方专门指出.

今后还将出现上标. 这时指标是上标和下标的统称，取值约定和求和约定仍有效. 但这时的“重复指标”应理解为“上标和下标分别相同地出现一次”，如 $t^{ij}n_j$ 中的指标 j，$E^{ijkl}\varepsilon_{kl}$ 中的指标 k，l 均为哑指标. 应注意的是，在既有上标，又有下标的情况，同一类型的指标是不允许重复的，如 $P^{ii}{}_{kk}$ 是不允许的. 在任何情况下，指标重复一次以上，如 $L^{k}{}_{kk}$，M_{kkkk} 都是不允许的，这时求和约定自动失效.

§2 若干符号

为了行文简练，将应用某些近代数学通用的符号：

(i) 设集合 A 由元素 x_1，x_2 和 x_3 组成. 我们用

$$A=\{x_1, x_2, x_3\} \tag{1}$$

表示. 当元素较多时，用特征描述法较方便. 这时上式可写为

$$A=\{x_i | i=1, 2, 3\}, \tag{2}$$

这里一竖“|”后面陈述 x_i 所具有的特征. 利用取值约定，(2) 式又可写成 $A=\{x_i\}$，这里我们默认了空间的维数是 3. 又如

$$B=\{a | a \text{ 是矩形，} a \text{ 的面积}=1\}. \tag{3}$$

若 x 是集合 A 的一个元素，我们说 x 属于 A，用符号

$$x \in A \tag{4}$$

表示. 而“$x \notin A$”则表示“x 不属于 A”.

设有另一集合 B. 如果 B 的每一个元素也是 A 的元素，我们说“A 包含 B”或“B 是 A 的一个子集”，用“$B \subset A$”表示.

(ii) “$\forall$”表示“对于所有”. 例：“对于所有属于实数域R的

x，$x^2 \geqslant 0$" 可写成

$$\text{“}\forall x \in \mathbf{R}: x^2 \geqslant 0\text{” 或 “}x^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbf{R}\text{”.} \tag{5}$$

(iii) "$\exists$"表示"存在"。例："$\exists x: x^2 = 4$"是"存在一个 x，使 $x^2 = 4$"的缩写。

"$\exists!$"表示"存在唯一的"。例："$\exists! x \in \mathbf{Z}: 3 < x < 5$"表示"在整数系 $\mathbf{Z}$ 中存在唯一的大于 3，小于 5 的数 x"。

(iv) "$A \Longrightarrow B$"表示"如果 A 成立，则 B 也成立"，或者说"B 是 A 的一个推论"。我们也说："A 是 B 的一个充分条件，而 B 是 A 的必要条件"。"$A \Longleftrightarrow B$"表示"A 成立，当且仅当 B 成立"，或者说"A 和 B 是等价的"，"A 是 B 的充分必要条件"。

(v) "$F: A \to B: a \longmapsto b$"表示"$F$ 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，即是一个法则，它使每个 $a \in A$ 有唯一的一个 $b \in B$ 与之对应"。应注意："$\to$"表示从集合到集合，而"$\longmapsto$"表示从元素到元素。

(vi) "$:=$"表示左边由右边的表达式定义。也用到反过来的符号"$=:$"。

(vii) 设有 r 个集合 $A_1, \cdots, A_r$，它们的**笛氏乘积**是一个新的集合，定义为

$$A_1 \times \cdots \times A_r := \{(a_1, \cdots, a_r) \mid a_1 \in A_1, \cdots, a_r \in A_r\}, \tag{6}$$

其中 $(a_1, \cdots, a_r)$ 称为 **r 元有序组**。

(viii) "□"表示诸如定义，证明，注解或例题等逻辑单元的终止。但"□"只在该单元的终止可能和下文不明显分清时使用。

§3 置　　换

设 K 是 k 元集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$. 从 K 到自身的 1—1 变换

$$\sigma: K \to K: i_r \longmapsto \sigma(i_r), \quad r = 1, 2, \cdots, k \tag{1}$$

称为 **k 元置换**，也可写成

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots i_k \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_k) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \cdots, \sigma(i_k))$ 是 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 的一个排列，就是说，每一个 k 元置换对应于一个 **k 元排列**. 因此，k 元置换的个数等于 k 元排列的个数，即 $k!$。

设另有一 k 元置换

$$\tau: j_r \longmapsto \tau(j_r), \quad r = 1, 2, \cdots, k, \tag{3}$$

则两个 k 元置换 σ, τ 连续进行的效果相当于一个 k 元置换，称为这两个 k 元置换的乘积，并记作

$$\tau\sigma: i_r \longmapsto \tau(\sigma(i_r)), \quad r = 1, 2, \cdots, k. \tag{4}$$

例：4 元置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_1 & i_3 & i_4 & i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ j_4 & j_3 & j_1 & j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

则

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_2 & i_4 & i_1 & i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

k 元置换的全体构成一个群，称为 **k 元置换群**，并记作 $\mathfrak{S}_k$. 在不引起误会时，常省略下标 k 而写成 $\mathfrak{S}$.

从置换例 (5) 可看到，置换后元素（下行）的排列可由元素的下标的排列代表. 如果有一个下标较大的元素排在一个下标较小的元素前面，则称为一个**反序**. 在 (5) 中，i_3 在 i_2 之前，是一个反序；i_4 也在 i_2 之前，又是一个反序，故置换 σ 共有两个反序. 置换后元素的排列包含的反序总数称为该**置换的反序数** $N(\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k))$，或简记为 $N(\sigma)$. 例如，(5) 的 $N(i_1, i_3, i_4, i_2) = 2$. 代数证明，可以将置换前元素的排列通过逐次地每两元素的**对换**而得到置换后元素的排列. 虽然这些对换的次序和次数不唯一，但对换次数 $N'(\sigma)$ 和反序数 $N(\sigma)$ 有相同的奇偶性. 因此，这种奇偶性反映置换的一种内在性质. 当 $N(\sigma)$ 为奇数时，该置换称为**奇置换**，否则为**偶置换**. 表征置换奇偶性的

$$\operatorname{sgn}\sigma := (-1)^{N(\sigma)} = (-1)^{N'(\sigma)} = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ 是偶置换} \\ -1, & \sigma \text{ 是奇置换} \end{cases} \tag{8}$$

称为**置换 σ 的符号**. 显然

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}\tau \ \operatorname{sgn}\sigma, \quad \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma. \tag{9}$$

事实上,实现$\tau\sigma$的对换次数为分别实现 σ 和 τ 的对换次数之和,故

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\tau\sigma) &= (-1)^{N'(\tau\sigma)} = (-1)^{N'(\tau)+N'(\sigma)} \\ &= (-1)^{N'(\tau)} \cdot (-1)^{N'(\tau)} = \operatorname{sgn}\tau\operatorname{sgn}\sigma.\end{aligned}$$

公式 $(9)_2$ 的根据是: $\sigma^{-1}\sigma$ 是恒同置换 id, 而 $\operatorname{sgn}(id) = 1$. 于是利用 $(9)_1$, 得

$$\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sgn}\sigma} = \operatorname{sgn}\sigma.$$

第II章　张量代数

§1　向量空间和基

严格的张量运算建立在向量空间概念的基础上. 理论叙述的每一步几乎都涉及这个概念. 有必要首先明确交待向量空间的定义及有关的若干性质. 在这里, 向量是一个抽象概念. 今后我们理解**实数**和**标量**是同义语.

1.1 定义　(实)**向量空间**是在实数域 R 上的集合 $\mathscr{V}$, 它的元素称为**向量**($\boldsymbol{o}$ 表示**零向量**), 并且 $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathscr{V}$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ 定义有下述两种运算:

(一) **向量加法**"$+: \mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}:(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\longmapsto \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$",满足

(i) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$　(加法交换律)

(ii) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$　(加法结合律)

(iii) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{u}$　(零向量的存在性)

(iv) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{o}$　(负向量的存在性)

(二) **数量乘法**"$\ :\mathrm{R}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}:(\alpha,\boldsymbol{u})\longmapsto\alpha\boldsymbol{u}$", 满足

(v) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$　(对标量的分配律)

(vi) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$　(对向量的分配律)

(vii) $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$　(对标量的结合律)

(viii) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$. □

运算的结果仍然是向量,常说, $\mathscr{V}$ 关于这两种运算是**封闭的**. 性质(ii)和(vii)使省去括弧的写法 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 和 $\alpha\beta\boldsymbol{u}$ 不引起含糊. 向量的减法约定为

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v}). \tag{1}$$

根据 $\mathscr{V}$ 的封闭性可知: 任何向量组$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}\subset\mathscr{V}$的线性组合

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i \boldsymbol{u}_i, \ \forall \alpha^1, \cdots, \alpha^r \in \mathrm{R} \tag{2}$$

仍然是一个向量,即仍属于 $\mathscr{V}$. 这里 r 可能不是空间维数,和号不能省略。

1.2 定义 向量组 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ 称为**线性相关的**, 如果存在不全为零的实数 $\alpha^1, \cdots, \alpha^r$, 使得

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{o}.$$

否则, 称为**线性无关**的. □

从这定义, 得

1.3 定理 向量组 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ 是线性无关的,当且仅当

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{o} \implies \alpha^i = 0 \ (i = 1, \cdots, r). \tag{3}$$

1.4 定义 线性无关向量组$\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n\} \subset \mathscr{V}$称为 $\mathscr{V}$ 的**极大线性无关向量组**,如果 $\forall \boldsymbol{u} \in \mathscr{V}: \{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n, \boldsymbol{u}\}$ 是线性相关的,即任何 $\boldsymbol{u}$ 可由该向量组线性表出:

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{g}_i. \tag{4}$$

可以证明,$\mathscr{V}$ 的任何极大线性无关向量组包含向量的个数相同. 这个数 n 称为向量空间 $\mathscr{V}$ 的**维数**,记作 $\dim\mathscr{V}$. (4) 的右端对 i 从 1 到维数 n 求和,所以按求和约定省去和号. 按取值约定,极大线性无关组可简记作 $\{\boldsymbol{g}_i\}$, 称为 $\mathscr{V}$ 的一组(**协变**)**基**. 基的每一向量 $\boldsymbol{g}_i$ 称为(**协变**)**基向量**. (4) 中的 u^i 称为向量 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{g}_i$ 方向的(**逆变**)**分量**. □

读者发现,具有下标的量我们都冠以"协变"字样,而有上标的则加"逆变". 这包含一种规律性, 道理以后再作交代.

1.5 定义 向量空间 $\mathscr{V}$ 的任何非空子集 $\mathscr{W}$ 称为 $\mathscr{V}$ 的子空间,如果 $\mathscr{W}$ 对在 $\mathscr{V}$ 所定义的加法和数乘也是封闭的, 即

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{W}, \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}) \Longrightarrow \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} \in \mathscr{W}, \tag{5}$$

§2 内积空间，度量张量和对偶基

我们生活或周围自然现象进行所在的场所是通常称作的三维欧氏空间．这个空间的每一点有一定的结构．在每一点上可以作用有各种各样的(约束)向量，向量间可以进行运算，例如 (i) 两向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 可以按平行四边形相加，向量可以伸长或缩短为另一向量(容易验证，这种加法以及数乘满足上一节对向量空间所规定的性质)；(ii) 可以按 $|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\theta$ 进行点乘，求它们的夹角和向量的长度；(iii) 此外，还可以进行叉乘，结果是垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 而长度为 $|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\sin\theta$ 的向量．我们把这些概念公理化，推广至 n 维空间．首先根据 (ii)，在向量空间里引进点积的概念．在某种意义上，叉积将由外积来对应，这一点以后再讨论．

2.1 定义 (实) 向量空间成为(实)**内积空间** (仍记为 $\mathscr{V}$)，如果$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathscr{V}$；$\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ 再定义**点积**运算"：$\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathrm{R}:(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\longmapsto\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$"，满足

(i) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}$ (对称性)

(ii) $\boldsymbol{u}(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w})=\alpha\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}$ (双线性)

(iii) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\geqslant 0$，且 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$． (正定性)

2.2 定义 向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 称为互相正交的，如果 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=0$．□

作为性质 (iii) 的推论，我们有

2.3 定理 正交于所有向量的向量必是零向量，即

$$\text{“}\forall\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}:\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=0\text{”}\Longrightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}. \tag{1}$$

这个性质称为点积的**非退化性**．

证明 设定理的结论非真，即存在正交于所有向量的非零向量 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$，则只要取 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，就得与性质(iii)矛盾的结论 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}=0$．

2.4 定义 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是内积空间 $\mathscr{V}$ 的协变基．由给定的点积运算唯一确定的对称矩阵

$$[g_{ij}]:=[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j]\quad(\text{由点积的对称性，}g_{ij}=g_{ji}) \tag{2}$$

的元素称为**度量张量**的协变分量．□

这里姑且先用张量一词,以后再明确定义。有了$[g_{ij}]$，就可以

(a) 利用点积的双线性性质和(2)，计算任意两向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的点积

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=(u^i\boldsymbol{g}_i)(v^j\boldsymbol{g}_j)=u^iv^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=g_{ij}u^iv^j; \tag{3}$$

(b) 根据点积的正定性，定义向量的长度

$$|\boldsymbol{u}|:=\sqrt{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}=\sqrt{g_{ij}u^iu^j}; \tag{4}$$

(c) 定义两非零向量的夹角 $\theta\in[0,\pi]$ 的余弦

$$\cos\theta:=\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\frac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{g_{kl}u^ku^l}\sqrt{g_{rs}v^rv^s}}. \tag{5}$$

"度量张量"的称谓正由于它确定向量的长度。夹角余弦的定义(5)是三维情形的推广。这推广是可行的，因为根据下面的定理，(5)式右端的绝对值恒不大于1。

2.5 定理 (Schwartz 不等式) 设 $\mathscr{V}$ 是内积空间,恒有

$$|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}. \tag{6}$$

证明 若 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 线性相关 ($\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ 或 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ 是特殊情形)，(6)式显然成立。对于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 线性无关情形,根据点积的性质，有

$$0\leqslant\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}-\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}-\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$$

$$=\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|^2}-2\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}+\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}=2\left(1-\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}\right),$$

并由此得

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\leqslant|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|, \tag{7}$$

用 $-\boldsymbol{u}$ 代替 $\boldsymbol{u}$，(7)式变为

$$-\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\leqslant|-\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\text{即}-|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\leqslant\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}. \tag{8}$$

(7)和(8)给出(6)。□

显然,正交向量的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，和三维情形一致。

将(1.4)代入性质(iii)，点积正定性等价地表达为

$$g_{ij}u^iu^j\geqslant0,\text{ 且 }g_{ij}u^iu^j=0\iff u^i=0. \tag{9}$$

这说明，$[g_{ij}]$ 是正定二次型 $g_{ij}u^iu^j$ 的系数矩阵。代数学告诉我

们

2.6 定理

$$g := \det[g_{ij}] > 0. \quad \square \tag{10}$$

可以看出，定义点积等价于给定对称正定矩阵 $[g_{ij}]$.

2.7 定义 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是内积空间 $\mathscr{V}$ 的协变基. 线性无关向量组 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 称为 $\mathscr{V}$ 的**逆变基**(或者说 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 是 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的**对偶基**)，如果满足

$$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & 当\ i = j, \\ 0, & 当\ i \neq j. \end{cases} \tag{11}$$

δ^i_j 称为 **Kronecker 符号.**

2.8 定理 在内积空间 $\mathscr{V}$ 里，存在 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的唯一的对偶基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$.

证明 设存在满足条件 (11) 的向量组 $\{\boldsymbol{g}^i\}$. 这些向量 $\boldsymbol{g}^i$ 在协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 上的分解为

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ik}\boldsymbol{g}_k. \tag{12}$$

代入条件 (11)，并利用 (2)，得

$$\delta^i_j = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j = g^{ik}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_j = g^{ik}g_{kj}. \tag{13}$$

把各 g^{il} 看成未知数，则 $[g^{il}]$ 是一个未知的 $n \times n$ 矩阵. 将 (13) 写成矩阵形式，又得

$$[g^{il}][g_{kj}] = [\delta^i_j] = I\ (单位阵). \tag{14}$$

根据定理 2.6，对称矩阵 $[g_{kj}]$ 是满秩的，有唯一的逆(也是对称). (14) 说明，$[g^{il}]$ 正是这个逆. 回到 (12)，证实了满足 (11) 的向量组 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 的存在唯一性.

取 (14) 的行列式，得

$$\det[g^{il}] \cdot \det[g_{kj}] = 1.$$

由 (10)，又有

$$\det[g^{ii}] = \frac{1}{\det[g_{ij}]} > 0. \tag{15}$$

根据定理 1.3，如果能证明，由

$$\mu_i\boldsymbol{g}^i = 0 \tag{16}$$

可得到

$$\mu_i = 0 \tag{17}$$

的结论，则 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 是线性无关组．为此，将 (12) 代入 (16)，得

$$\mu_i g^{ik} \boldsymbol{g}_k = 0. \tag{18}$$

因为协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是线性无关组，亦根据定理 1.3，上式导致

$$g^{ki} \mu_i = 0. \tag{19}$$

把各 μ_i 看成未知量，上式是齐次线性代数方程组．由于 (15)，它的系数矩阵行列式大于零，故只有零解 (17)，从而得证具有 n 个向量的 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 的线性无关性．□

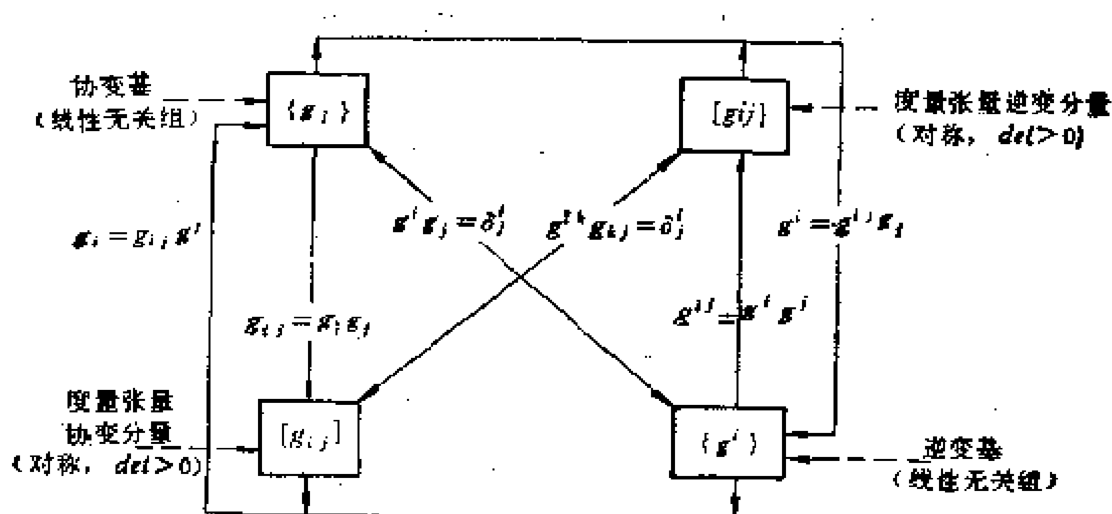
将两个逆变基向量点乘，利用 (12)，(2) 和 (13)，得

$$\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j = (g^{ik} \boldsymbol{g}_k)(g^{jl} \boldsymbol{g}_l) = g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ik} \delta^j_k = g^{ij}. \tag{20}$$

这式从另一角度说明 $[g^{ij}]$ 的对称性．将 g_{ji} 乘 (12)，又得

$$g_{ji} \boldsymbol{g}^i = g_{ji} g^{ik} \boldsymbol{g}_k = \delta^k_j \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}_j. \tag{21}$$

至此，我们已获得了内积空间的全部基本量：$\{\boldsymbol{g}_i\}$，$[g_{ij}]$，$[g^{ij}]$，$\{\boldsymbol{g}^i\}$ 以及它们的性质和相互关系． 为了对这些量取得更系统和更直观的看法，我们给出下述关系图．



从协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 出发，可依次求得 $[g_{ij}]$，$[g^{ij}]$，$\{\boldsymbol{g}^i\}$．按相反次序，从逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 出发，又可求得 $[g^{ij}]$，$[g_{ij}]$，$\{\boldsymbol{g}_i\}$．指标的"上"与"下"，呼谓的"逆变"与"协变"，只是为了区别在作用上是等价的两组量． 我们完全可以将它们的上、下标和称呼颠倒过来．我们称 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 互为对偶基，或互为**共基**．

既然$\{\boldsymbol{g}^i\}$也是$\mathscr{V}$的一组基，任何向量就可由它线性表出：

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i,\quad \boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i. \tag{22}$$

同样，也可用$[g^{ij}]$计算点积，长度及夹角余弦：

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=g^{ij}u_iv_j, \tag{23}$$

$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{g^{ij}u_iu_j}, \tag{24}$$

$$\cos\theta=\frac{g^{ij}u_iv_j}{\sqrt{g^{kl}u_ku_l}\sqrt{g^{rs}v_rv_s}}. \tag{25}$$

以后将看到，g^{ij}和g_{ij}只不过是同一张量的不同类型的分量而已。我们称g^{ij}是度量张量的逆变分量。同样，u^i和u_i也是同一向量$\boldsymbol{u}$的分量。和逆变分量u^i不同，u_i称为$\boldsymbol{u}$的协变分量。只要将$\boldsymbol{g}^j$和$\boldsymbol{g}_j$分别点乘(1.4)和$(22)_1$，并利用(11)，就得这两种分量的表达式：

$$u^i=\boldsymbol{u}\boldsymbol{g}^i,\quad u_i=\boldsymbol{u}\boldsymbol{g}_i. \tag{26}$$

将(21)和(12)分别代入(1.4)和$(22)_1$，又有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=u^i\boldsymbol{g}_i=u^jg_{ij}\boldsymbol{g}^i\\&=u_i\boldsymbol{g}^i=u_jg^{ij}\boldsymbol{g}_i.\end{aligned}$$

从这里得

$$(u^i-g^{ij}u_j)\boldsymbol{g}_i=0,\quad (u_i-g_{ij}u^j)\boldsymbol{g}^i=0.$$

考虑到基向量的线性无关，就得$\boldsymbol{u}$的两种分量的关系：

$$u^i=g^{ij}u_j,\quad u_i=g_{ij}u^j. \tag{27}$$

联系$\boldsymbol{u}$的两种分量的是度量张量的有关分量，这些分量起着升降指标的作用，有人叫作“**指标游戏**”。(1.4)和$(22)_1$是同一向量的两种表示，无实质区别。正因为此，用“**芯字母**”$\boldsymbol{u}$强调两种分量的实质相同，而指标的上下则用来区别不同的表示。我们经常等价地说：“向量$\boldsymbol{u}$”，“向量u^i”或“向量u_i”。今后将出现更复杂的量，其表示方式的数目就相应地增加。

§3 张量和张量积

现在从另一角度来看向量$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{v}$的点积。如果固定$\boldsymbol{u}$而变

化 $\boldsymbol{v}$，则实数 $\boldsymbol{uv}$ 也随之而变化。 因此，考虑到点积的线性性质(ii)，向量 $\boldsymbol{u}$ 可以看作是 $\boldsymbol{v}$ 的(标量值)线性函数：

$$\boldsymbol{u}:\mathscr{V}\to\mathrm{R}:\boldsymbol{v}\longmapsto\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}):=\boldsymbol{uv}, \tag{1}$$

它满足

$$\boldsymbol{u}(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w})=\alpha\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})+\beta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}),\ \forall\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathscr{V};\quad\alpha,\beta\in\mathrm{R}.$$

按 (1) 将 (2.26) 改写，就得向量 $\boldsymbol{u}$ 两种分量的新含义：是线性函数 $\boldsymbol{u}$ 在基向量上的算值：

$$u_i=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}_i),\quad u^i=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}^i). \tag{2}$$

将这种把向量看作线性函数的观念推广，就得一般的张量定义。

3.1 定义 对于任意正整数 r，r 重线性函数

$$\boldsymbol{\Phi}:\underbrace{\mathscr{V}\times\cdots\times\mathscr{V}}_{r\text{ 重}}\to\mathrm{R}:(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\longmapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$$

称为在 $\mathscr{V}$ 的 **r 阶张量**。r 重线性是指，对 1 至 r 范围内的任意 i，满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\alpha\boldsymbol{v}_i+\beta\boldsymbol{v}'_i,\cdots)&=\alpha\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}_i,\cdots)\\&\quad+\beta\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}'_i,\cdots),\ \forall\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}'_i\in\mathscr{V};\ \alpha,\beta\in\mathrm{R}.\ \square\end{aligned} \tag{3}$$

两个 r 阶张量相等 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Psi}$，如果 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$，$\forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in\mathscr{V}$。

3.2 定义 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 在基向量上的算值称为该张量的分量，并记作，

$$\Phi_{i_1\cdots i_r}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r}), \tag{4}$$

$$\cdots$$

$$\Phi_{i_1\cdots i_k}{}^{i_{k+1}\cdots i_r}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_k},\boldsymbol{g}^{i_{k+1}},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r}), \tag{5}$$

$$\cdots$$

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r}). \tag{6}$$

(4) 型称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的协变分量，(6) 为逆变分量，其余称**混合分量**。$\square$

每一个自变量可独立地取为协变或逆变基向量，因此共有 2^r 种分量。作为特殊情形，向量 $\boldsymbol{u}$ 只有一个自变量，亦称**一阶张量**，共有 2 种分量。$\boldsymbol{\Phi}$ 的各种分量间也是通过度量张量的分量的升降指标作用相联系的，例如

$$\Phi^{j}{}_{i_2\cdots i_r} = \Phi(g^j, g_{i_2}, \cdots g_{i_r}) = \Phi(g^{ji_1} g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_r})$$
$$= g^{ji_1} \Phi(g_{i_1}, \cdots, g_{i_r}) = g^{ji_1} \Phi_{i_1 \cdots i_r}. \tag{7}$$

因此，给定一种类型的分量，就可通过度量张量升降指标得出所有其他类型的全部分量。由于各指标可以从 1 至 n 取值，r 阶张量的每种分量共有 n^r 个。

3.3 定理 给定 r 阶张量 $\Phi \Longleftrightarrow$ 给定它的任一种类型分量(例如，协变分量 $\Phi_{i_1\cdots i_r}$)。

证明 所谓给定一个 r 阶张量 Φ，就是给定对任何变量 $v_1, \cdots, v_r \in \mathscr{V}$ 算出 $\Phi(v_1, \cdots, v_r)$的一种法则。显然，按 (4) 就可算出所有分量 $\Phi_{i_1\cdots i_r}$。反之，若给定 $\Phi_{i_1\cdots i_r}$ 就可按下式算出 Φ 在任意 $v_1, \cdots, v_r \in \mathscr{V}$ 上的值

$$\Phi(v_1, \cdots, v_r) = \Phi(v_1^{i_1} g_{i_1}, \cdots, v_r^{i_r} g_{i_r})$$
$$= v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r} \Phi(g_{i_1}, \cdots, g_{i_r})$$
$$= v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r} \Phi_{i_1 \cdots i_r}. \quad \square \tag{8}$$

证明中用到了 Φ 的多重线性性质。

3.4 定理 设 Φ 和 Ψ 是任意 r 阶张量，α 是任意实数。如果称在任何自变量的算值均为零的张量为**零张量 O**，并按下述定义引进“张量加法”和“数乘”：

$$(\Phi + \Psi)(v_1, \cdots, v_r) := \Phi(v_1, \cdots, v_r)$$
$$+ \Psi(v_1, \cdots, v_r), \tag{9}$$

$$(\alpha\Phi)(v_1, \cdots, v_r) := \alpha(\Phi(v_1, \cdots, v_r)), \tag{10}$$

$\forall v_1, \cdots, v_r \in \mathscr{V}$，则全体 r 阶张量构成一个向量空间，称为 $\mathscr{V}$ 上的 **r 阶张量空间**，记作 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$。

证明 从 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的定义可知，它对上述两种运算是封闭的。又由于运算 (9) 和 (10) 按定义归结为实数的运算，它们显然满足向量空间的八条性质。 $\square$

只要在 (9) 和 (10) 式取基向量作为自变量，利用张量分量的定义，作为结论就得古典的“张量和”及“数乘”的分量定义式。例如

$$(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})^{i_1\cdots i_r}=\Phi^{i_1\cdots i_r}+\Psi^{i_1\cdots i_r}$$ （被加各分量必须是同类型的），

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi})^{i_1\cdots i_r}=\alpha\Phi^{i_1\cdots i_r}.$$

3.5 定义 设 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 和 $\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 分别是在 $\mathscr{V}$ 上的 r 阶和 s 阶张量空间. 定义一个映射

$$\otimes:\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\times\mathscr{T}_s(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_{r+s}(\mathscr{V}):(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})\longmapsto\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi},\tag{11}$$

按下述条件

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r,\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s}):=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s}),\ \forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s}\in\mathscr{V}.\tag{12}$$

$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的**张量积**. □

显然,张量积 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 是 $r+s$ 重线性函数，即 $r+s$ 阶张量. 根据定义,张量积映射$\otimes$是一个双线性映射,即满足

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi}=\alpha(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\boldsymbol{\Phi}\otimes(\alpha\boldsymbol{\Psi})$$ （因而可笼统地写 $\alpha\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$），(13)

$$(\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2)\otimes\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}_1\otimes\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}_2\otimes\boldsymbol{\Psi},\tag{14}$$

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes(\boldsymbol{\Psi}_1+\boldsymbol{\Psi}_2)=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}_1+\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}_2,\tag{15}$$

$\forall\alpha\in\mathbf{R};\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}_1,\boldsymbol{\Phi}_2\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V});\boldsymbol{\Psi},\boldsymbol{\Psi}_1,\boldsymbol{\Psi}_2\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$.

以 (14) 为例,按定义验证如下:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2)\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})&=(\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2)(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})\\&=(\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)+\boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r))\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})\\&=\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})\\&\quad+\boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})\\&=\boldsymbol{\Phi}_1\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})+\boldsymbol{\Phi}_2\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s})\\&=(\boldsymbol{\Phi}_1\otimes\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}_2\otimes\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s}).\end{aligned}$$

由于自变量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{r+s}$ 的任意性,上式导致 (14).

3.6 定理 张量积 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 的分量等于 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 相应分量的乘积.

证明 根据定义 3.2，例如，我们有 Ω 的一种混合分量如下

$$\begin{aligned}\Omega^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} &= \Phi\otimes\Psi(g^{i_1}, \cdots, g^{i_r}, g_{j_1}, \cdots, g_{j_s}) \\ &= \Phi(g^{i_1}, \cdots, g^{i_r})\Psi(g_{j_1}, \cdots, g_{j_s}) \\ &= \Phi^{i_1\cdots i_r}\Psi_{j_1\cdots j_s}. \quad \square \qquad (16)\end{aligned}$$

按经典叫法，张量积就是所谓**并乘**. Φ 和 Ψ 分别有 n^r 和 n^s 个上述类型的分量，从而 Ω 有 n^{r+s} 个分量(相应类型的).

在张量积 $\Phi\otimes\Psi$ 中，Φ 和 Ψ 本身又可以是别的更低阶张量的张量积. 注意到，张量积的定义归结为实数的乘积，从而满足结合律，例如 $(\Phi\otimes\Psi)\otimes\Omega = \Phi\otimes(\Psi\otimes\Omega)$. 于是我们可以将张量积映射推广至任意 s 个张量空间:

$$\begin{aligned}\otimes: \mathscr{T}_{r_1}(\mathscr{V}) \times \cdots \times \mathscr{T}_{r_s}(\mathscr{V}) &\to \mathscr{T}_{r_1+\cdots+r_s}(\mathscr{V}): \\ (\Phi_1, \cdots, \Phi_s) &\longmapsto \otimes(\Phi_1, \cdots, \Phi_s) \\ &= \Phi_1\otimes\cdots\otimes\Phi_s,\end{aligned}$$

按条件

$$\begin{aligned}&\otimes(\Phi_1, \cdots, \Phi_s)(v_{i_1}, \cdots, v_{i_{r_1}}, \cdots, v_{j_1}, \cdots, v_{j_{r_s}}) \\ &= \Phi_1(v_{i_1}, \cdots, v_{i_{r_1}})\cdots\Phi_s(v_{j_1}, \cdots, v_{j_{r_s}}). \qquad (17)\end{aligned}$$

容易验证，$\otimes$是多重线性映射:

$$\begin{aligned}&\otimes(\cdots, \alpha\Phi_i + \beta\Phi_i', \cdots) \\ &= \alpha\otimes(\cdots, \Phi_i, \cdots) + \beta\otimes(\cdots, \Phi_i', \cdots), \\ &\forall\alpha, \beta\in \mathbf{R};\ \Phi_i, \Phi_i' \in \mathscr{T}_{r_i}(\mathscr{V}).\end{aligned}$$

在每个 Φ_r 都是一阶张量(即向量 u_r)的最简单情况下，上述多重张量积成为 $u_1\otimes\cdots\otimes u_s$. 它是 s 阶张量，在 $v_1, \cdots, v_s\in\mathscr{V}$ 上的值是

$$\begin{aligned}u_1\otimes\cdots\otimes u_s(v_1, \cdots, v_s) &= u_1(v_1)\cdots u_s(v_s) \\ &= (u_1v_1)\cdots(u_sv_s). \qquad (18)\end{aligned}$$

这种具有 s 个向量(不一定线性无关)的张量积称为**简单张量**.

既然 r 阶张量空间 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 是一个向量空间(它的元素——r 阶张量——是一种广义的向量)，在 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 也就有线性无关组的问题，而极大线性无关组就是 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的基，正如 $\{g_i\}$ 或 $\{g^i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的基一样. 下面讨论这个问题.

3.7 定理 $\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$ 是 r 阶张量空间 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的一组基，称为**乘积基**。乘积基共有 n^r 个简单张量，故 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 是 n^r 维向量空间。

证明 首先证

$$\mu^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}=0\Longrightarrow\mu^{i_1\cdots i_r}=0. \tag{19}$$

事实上，$(19)_1$ 的左端是 n^r 个 r 阶简单张量的线性组合，因而仍是一个 r 阶张量，而且是零张量，即它的每个分量都应为零：

$$\begin{aligned}0&=\mu^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{g}^{j_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{j_r})\\&=\mu^{i_1\cdots i_r}\delta_{i_1}^{j_1}\cdots\delta_{i_r}^{j_r}=\mu^{j_1\cdots j_r}.\end{aligned}$$

此即 $(19)_2$。于是，根据定理 1.3，简单张量组 $\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$ 是线性无关组。今证任何 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 可由 $\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$ 线性表出。利用 (18) 式，$\forall\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r\in\mathscr{V}$：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r)&=\boldsymbol{\Phi}(v^1_{i_1}\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,v^r_{i_r}\boldsymbol{g}^{i_r})\\&=v^1_{i_1}\cdots v^r_{i_r}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})\\&=\Phi^{i_1\cdots i_r}v^1_{i_1}\cdots v^r_{i_r}=\Phi^{i_1\cdots i_r}(\boldsymbol{v}^1\boldsymbol{g}_{i_1})\cdots(\boldsymbol{v}^r\boldsymbol{g}_{i_r})\\&=\Phi^{i_1\cdots i_r}(\boldsymbol{g}_{i_1}\boldsymbol{v}^1)\cdots(\boldsymbol{g}_{i_r}\boldsymbol{v}^r)\\&=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r$ 的任意性，得

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}.\ \square \tag{20}$$

有如 $\mathscr{V}$ 的基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 通过指标游戏诱导出对偶基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$，$\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的乘积基 $\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$ 诱导出 2^r-1 组基，只要在上述基中一个，若干个或甚至 r 个协变基向量 $\boldsymbol{g}_{i_\gamma}$ 代之以逆变基向量 $\boldsymbol{g}^{i_\gamma}$，例如

$\{\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\boldsymbol{g}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$，$\{\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\boldsymbol{g}^{i_2}\otimes\boldsymbol{g}_{i_3}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\}$，$\cdots$，$\{\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}\}$ 等。诱导出的每一组均可用相同办法证明是 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的基。因此，$\boldsymbol{\Phi}$ 就有 2^r 种等价的表示式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}&=\Phi_{i_1}{}^{i_2\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\boldsymbol{g}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\\&=\Phi_{i_1i_2}{}^{i_3\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\boldsymbol{g}^{i_2}\otimes\boldsymbol{g}_{i_3}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\\&=\cdots=\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}.\end{aligned} \tag{21}$$

这些分解系数就是定义 3.2 所定义的各种分量。

$\mathscr{T}_r(\mathscr{V}^*)$ 的每一种基的元素是协变或逆变基向量的张量积，都是简单张量，称为**基张量**. 一个基的基张量作为一个 r 阶张量又可由任何基线性表出，例如

$$\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\boldsymbol{g}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}=g^{i_1i'_1}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r},\tag{22}$$

$$\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}=g^{i_1i'_1}\cdots g^{i_ri'_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}.\tag{23}$$

这些都是以 $\boldsymbol{g}^{i_1}=g^{i_1i'_1}\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r}=g^{i_ri'_r}\boldsymbol{g}_{i_r}$ 代人的结果. 在上两式中，各分量均是度量张量各有关分量的乘积，它们同时又是指标的升降者.

类似于向量 $\boldsymbol{a}$ 的两种分量的关系 (2.27)，任意 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 2^r 种分量间也通过指标游戏由度量张量联系起来. 用相同于 (2.27) 的证法，容易证明，例如

$$\Phi^{i_1}{}_{i_2\cdots i_r}=g^{i_1i'_1}\Phi_{i_1\cdots i_r},\tag{24}$$

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}=g^{i_1i'_1}\cdots g^{i_ri'_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}.\tag{25}$$

读者还应注意到，r 阶张量分量的指标个数也是 r，每一指标占一列. 当该列出现上标时，下标的位置应空出，例如 $\Phi^{i_1}{}_{i_2\cdots i_r}$ 不能写成 $\Phi^{i_1}_{i_2\cdots i_r}$. 有些书将空出的位置补上一个点，如 $\Phi^{i_1}{}_{\cdot i_2\cdots i_r}$，但这样写法太繁琐了.

从定理 3.7 还可以看到，r 阶简单张量固然是 r 阶张量，而 r 阶张量不一定就是简单张量，但任何 r 阶张量均可表为有限个(不超过 n^r 个) r 阶简单张量之和.

§4 基的转换和标准正交基

设有另一组协变基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$($\mathscr{V}$ 的另一个极大线性无关向量组)，用带撇的下标区别于原有协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$. 每个基向量 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 在旧基上分解得

$$\boldsymbol{g}_{i'}=A^i_{i'}\boldsymbol{g}_i\tag{1}$$

及

$$g_{i'j'}=\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}=A^i_{i'}A^j_{j'}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij},\tag{2}$$

其中 $A^i_{i'}$ (共为 n^2 个实数)称为**协变转换系数**. 将 (2) 写成矩阵形

式，并计算行列式，得

$$[g_{i'j'}]=[A^{i}_{i'}]^{T}[g_{kl}][A^{l}_{j'}],\tag{3}$$

$$\det[g_{i'j'}]=(\det[A^{i}_{i'}])^{2}\det[g_{kl}].\tag{4}$$

根据定理 2.6，有

$$\det[g_{i'j'}]>0,\tag{5}$$

从而

$$\det[A^{i}_{i'}]\neq 0.\tag{6}$$

将 $\{g_{i'}\}$ 的共基 $\{g^{i'}\}$ 的基向量 $g^{i'}$ 在旧逆变基 $\{g^{i}\}$ 上分解，又得

$$g^{i'}=A^{i'}_{i}g^{i}\tag{7}$$

及

$$g^{i'j'}=A^{i'}_{i}A^{j'}_{j}g^{ij},\tag{8}$$

其中 $A^{i'}_{i}$ (亦为 n^2 个实数)称为**逆变转换系数**. 两种转换系数符号的区别在于上标还是下标带撇. 让我们找出它们的关系. 为此，将 (1) 和 (7) 代入协变和逆变基向量的定义关系 (2.11)，我们有

$$\delta^{i'}_{j'}=g^{i'}g_{j'}=A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}g^{i}g_{j}=A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}\delta^{i}_{j}.\tag{9}$$

根据 Kronecker 符号的定义 (2.11)，某量的指标和 Kronecker 符号的某指标求和，相当于将该量的这个指标换以 Kronecker符号的另一指标。于是，上式变成

$$A^{i'}_{i}A^{i}_{j'}=\delta^{i'}_{j'}.\tag{10}$$

写成矩阵形式就是

$$[A^{i'}_{i}][A^{i}_{j'}]=[\delta^{i'}_{j'}](=I).\tag{11}$$

可见，$[A^{i'}_{i}]$ 是满秩矩阵 $[A^{i}_{i'}]$ 的逆矩阵，当然也是满秩的

$$\det[A^{i'}_{i}]\neq 0.\tag{12}$$

如果分别称 (1)，(7) 和 (2)，(8) 为基向量转换式和度量张量协变和逆变分量转换式，则 (9) 可看成是 Kronecker 符号的转换式.

新的协变基 $\{g_{i'}\}$ 诱导出 r 阶张量空间 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的新的乘积基：$\{g_{i'_1}\otimes\cdots\otimes g_{i'_r}\}$，$\{g^{i'_1}\otimes g_{i'_2}\otimes\cdots\otimes g_{i'_r}\}$，…，$\{g^{i'_1}\otimes\cdots\otimes g^{i'_r}\}$ 等. 任何 $\Phi\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 在新基上的表示式就是

$$\Phi=\Phi^{i'_1\cdots i'_r}g_{i'_1}\otimes\cdots\otimes g_{i'_r}=\Phi_{i'_1}{}^{i'_2\cdots i'_r}g^{i'_1}\otimes g_{i'_2}\otimes\cdots\otimes g_{i'_r}$$

$$= \cdots = \Phi_{i'_1\cdots i'_r}\boldsymbol{g}^{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i'_r}. \tag{13}$$

按定义 3.2 及张量的线性性质，$\boldsymbol{\Phi}$ 的各种分量有转换式

$$\begin{aligned}\Phi^{i'_1\cdots i'_r} &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^{i'_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i'_r}) = \boldsymbol{\Phi}(A^{i'_1}_{i_1}\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,A^{i'_r}_{i_r}\boldsymbol{g}^{i_r})\\ &= A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_r}_{i_r}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})\\ &= A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_r}_{i_r}\Phi^{i_1\cdots i_r},\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{i'_1}{}^{i'_2\cdots i'_r} &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{i'_1},\boldsymbol{g}^{i'_2},\cdots,\boldsymbol{g}^{i'_r})\\ &= A^{i_1}_{i'_1}A^{i'_2}_{i_2}\cdots A^{i'_r}_{i_r}\Phi_{i_1}{}^{i_2\cdots i_r},\end{aligned} \tag{15}$$

$\cdots$

$$\Phi_{i'_1\cdots i'_r} = A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_r}_{i'_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}. \tag{16}$$

r 阶张量分量的转换由 r 个相应的转换系数(包括求和)的乘积实现. 每一乘积包含协变(或逆变)转换系数的个数和协变(或逆变)指标，即下(或上)标的个数相同. 古典张量运算就是这样把张量定义为对应于每一组基按上述法则转换的有序数组. 本书采用的张量近代定义与基无关，而分量的转换法则是作为推论而得出的.

细观 (2), (8) 和 (9)，我们发现，它们都是二阶张量分量的转换公式. 因此，g_{ij}，g^{ij} 和 δ^i_j 都是二阶张量的分量. 另一方面，从下式

$$g^{ij} = g^{ir}\delta^j_r = g^{ir}g^{js}g_{rs} \tag{17}$$

可见，这些分量是通过度量张量的升降指标作用相联系的. 因此，它们实际上是一个张量——就是**度量张量**，记作 $\boldsymbol{I}$——的各种分量，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I} &= g_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^i = \delta^i_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\\ &= \delta^j_i\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j.\end{aligned} \tag{18}$$

按我们的规定，张量分量的每个指标占一列. Kronecker 符号属唯一例外，这非但不会引起混乱而相反地带来方便. 度量张量又叫**单位张量**或**恒同变换**，其根据见第 III 章.

4.1 定义 内积空间 $\mathscr{V}$ 的一组基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 称为**标准正交基**，如果满足

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \tag{19}$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，定义同 (2.11).

4.2 定理 在内积空间 $\mathscr{V}$，存在一组标准正交基.

证明 我们进行构造性证明. 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的一组基. 先构造一组正交基 $\{\boldsymbol{f}_i\}$，满足 $\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{f}_j=0$，若 $i\neq j$. 令 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{g}_1(\neq\boldsymbol{o})$，并设 $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{g}_2+\xi\boldsymbol{f}_1$. 这样确定 ξ，使 $\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2=0$，即

$$0=\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{g}_2+\xi\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_1\Longrightarrow\xi=-\frac{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{g}_2}{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_1}.$$

把 $\boldsymbol{f}_2$ 写成 $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{g}_2+\xi\boldsymbol{g}_1$，$\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\}$ 的线性无关使 $\boldsymbol{f}_2\neq 0$. 再设 $\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{g}_3+\xi_2\boldsymbol{f}_2+\xi_1\boldsymbol{f}_1$，这样确定 ξ_1，ξ_2，使 $\boldsymbol{f}_3$ 和 $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ 正交，即

$$0=\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{g}_3+\xi_1\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_1\Longrightarrow\xi_1=-\frac{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{g}_3}{\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{f}_1},$$

$$0=\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{g}_3+\xi_2\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_2\Longrightarrow\xi_2=-\frac{\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{g}_3}{\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{f}_2}.$$

把 $\boldsymbol{f}_3$ 写成 $\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{g}_3+\xi_2\boldsymbol{g}_2+(\xi_2\xi+\xi_1)\boldsymbol{g}_1$，易知，$\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3\}$ 的线性无关使 $\boldsymbol{f}_3\neq 0$. 这个过程可以一直进行下去，直到得到整个正交基 $\{\boldsymbol{f}_i\}$. 将 $\{\boldsymbol{f}_i\}$ 标准化，就得满足 (19) 的标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$：

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\boldsymbol{f}_i}{|\boldsymbol{f}_i|}.\ \square$$

4.3 注 在标准正交基的情形下，由于条件 (19)，协变基和逆变基是重合的，或者说，协变和逆变的差别消失. 这时，一般只用下标，遵循求和约定 1.2，从而 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 也只有一组乘积基 $\{\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}\}$.

4.4 定理 标准正交基间的转换系数矩阵是正交矩阵.

证明 设有另一标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_{i'}\}$，其中 $\boldsymbol{e}_{i'}=A_{i'i}\boldsymbol{e}_i$. 由正交条件 (19) 得

$$\delta_{i'j'}=\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}=A_{i'i}A_{j'j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=A_{i'r}A_{j'r},$$

写成矩阵形式

$$I=[\delta_{i'j'}]=[A_{i'i}][A_{j'j}]^T. \tag{20}$$

取行列式又得

$$\det[A_{i'i}]=\pm 1, \tag{21}$$

这正是正交矩阵的条件.

§5 缩并与点乘

5.1 定义 **缩并**是一种将 $r(\geqslant 2)$ 阶张量降 2 阶的映射

$$\mathbf{C}_{(p,q)}: \mathscr{T}_r(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_{r-2}(\mathscr{V}): \boldsymbol{\Phi} \longmapsto \mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Phi},$$

定义条件为

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{q-1}, \boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r) \\
&= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{v}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{q-1}, \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r), \\
&\forall \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{q-1}, \boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V}; \\
&1 \leqslant p < q \leqslant r,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\{\boldsymbol{g}_i\}$, $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的共基,重复指标 i 遵守求和约定. □

按定义，缩并显然是一种线性运算:

$$\mathbf{C}_{(p,q)}(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha\mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Phi} + \beta\mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Psi}. \tag{2}$$

如果另有共基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$, $\{\boldsymbol{g}^{i'}\}$, 则将 $\boldsymbol{g}_i = A_i^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$, $\boldsymbol{g}^i = A_{j'}^i\boldsymbol{g}^{j'}$ 代入 (1) 式右端,并考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$ 的线性性质,得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{g}_i, \cdots, \boldsymbol{g}^i, \cdots) \\
&= A_i^{i'}A_{j'}^i\boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{g}_{i'}, \cdots, \boldsymbol{g}^{j'}, \cdots) \\
&= \delta_{j'}^{i'}\boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{g}_{i'}, \cdots, \boldsymbol{g}^{j'}, \cdots) \\
&= \boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{g}_{i'}, \cdots, \boldsymbol{g}^{i'}, \cdots).
\end{aligned}$$

可见，缩并是一种与基的选择无关的不变性运算.

例 1. 求二阶简单张量 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ 的缩并.

结果是标量. 按定义

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{(1,2)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^i) = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{g}_i)(\boldsymbol{v}\boldsymbol{g}^i) \\
&= u_i v^i = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}.
\end{aligned} \tag{3}$$

例 2. 求 r 阶简单张量的缩并.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}_{(p,q)}(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_p\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_q\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r) \\
&\quad\cdot(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{v}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{q-1}, \boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r) \\
&= \boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{v}_{p+1}, \cdots, \\
&\quad\boldsymbol{v}_{q-1}, \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r) \\
&= (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1)\cdots(\boldsymbol{u}_{p-1}\boldsymbol{v}_{p-1})(\boldsymbol{u}_p\boldsymbol{g}_i)(\boldsymbol{u}_{p+1}\boldsymbol{v}_{p+1})\cdots(\boldsymbol{u}_{q-1}\boldsymbol{v}_{q-1})
\end{aligned}$$

$$\cdot(\boldsymbol{u}_q\boldsymbol{g}^i)(\boldsymbol{u}_{q+1}\boldsymbol{v}_{q+1})\cdots(\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r)$$
$$=(\boldsymbol{u}_p\boldsymbol{g}_i)(\boldsymbol{u}_q\boldsymbol{g}^i)[(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1)\cdots(\boldsymbol{u}_{p-1}\boldsymbol{v}_{p-1})(\boldsymbol{u}_{p+1}\boldsymbol{v}_{p+1})\cdots$$
$$\cdot(\boldsymbol{u}_{q-1}\boldsymbol{v}_{q-1})(\boldsymbol{u}_{q+1}\boldsymbol{v}_{q+1})\cdots(\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r)]$$
$$=(\boldsymbol{u}_p\boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_p\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_q\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r)$$
$$\cdot(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{p-1},\boldsymbol{v}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{q-1},\boldsymbol{v}_{q+1},\cdots,\boldsymbol{v}_r).$$

由 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 的任意性，得

$$\mathbf{C}_{(p,q)}(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_p\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_q\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r)$$
$$=(\boldsymbol{u}_p\boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_p\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_q\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r),\tag{4}$$

其中“$\wedge$”表示该量被跳过(如 $\boldsymbol{u}\otimes\hat{\boldsymbol{v}}\otimes\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}$)。

例 3. 求二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的缩并。

结果是一个标量。

$$\mathbf{C}_{(1,2)}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}^i)=T_i{}^i=T_i{}^i=:\mathrm{tr}\boldsymbol{T}.\tag{5}$$

例 4. 求 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的缩并。

任取 $\boldsymbol{\Phi}$ 的一种表示式。

$$\mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{v}}_p,\cdots,\hat{\boldsymbol{v}}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$$
$$=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{p-1},\boldsymbol{g}_i,\cdots,\boldsymbol{v}_{q-1},\boldsymbol{g}^i,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$$
$$=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{p-1},\boldsymbol{g}_i,\cdots,$$
$$\boldsymbol{v}_{q-1},\boldsymbol{g}^i,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$$
$$=\Phi^{i_1\cdots i_r}g_{i_pi}\delta^i_{i_q}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\hat{\boldsymbol{g}}_{i_p}\cdots\hat{\boldsymbol{g}}_{i_q}\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,$$
$$\hat{\boldsymbol{v}}_p,\cdots,\hat{\boldsymbol{v}}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_r).$$

由此得

$$\mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots p\cdots}{}_p{}^{\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{g}}_{i_p}\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{g}}_{i_q}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}.$$

可见，$\mathbf{C}_{(p,q)}\boldsymbol{\Phi}$ 的分量是原张量分量在 p,q 指标升降为一上一下后进行求和的结果。

古典张量运算正是这样用分量定义缩并的。只要缩并张量的阶 $\geqslant 2$，缩并可继续进行下去。缩并连续进行和同时进行的结果是相同的，但写法略有差别，后者较方便。例如二次缩并

$$\mathbf{C}_{(p,q)(s,t)}:\ \mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_{r-4}(\mathscr{V})$$

定义如下

$$\mathbf{C}_{(p,q)(s,t)}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{p-1},\boldsymbol{v}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{q-1},\boldsymbol{v}_{q+1},\cdots,$$

$$\boldsymbol{v}_{s-1}, \boldsymbol{v}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{v}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}, \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{v}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{q-1}, \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{v}_{q+1}, \cdots,$$

$$\boldsymbol{v}_{s-1}, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{v}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{t-1}, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{v}_{t+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r), \tag{6}$$

这里 p, q, s, t 是不相同的，但不一定按上述次序排列。将这定义用于 r 阶简单张量，就有

$$\mathbf{C}_{(p,q)(s,t)}(\boldsymbol{u}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_r)$$

$$= (\boldsymbol{u}_p \boldsymbol{u}_q)(\boldsymbol{u}_s \boldsymbol{u}_t)\boldsymbol{u}_1 \otimes \cdots \hat{\boldsymbol{u}}_p \cdots \hat{\boldsymbol{u}}_q \cdots \hat{\boldsymbol{u}}_s \cdots \hat{\boldsymbol{u}}_t \cdots \otimes \boldsymbol{u}_r. \tag{7}$$

对 r 阶张量进行 m 次缩并要求 $r \geqslant 2m$。

5.2 定义　全缩并 $\mathbf{C}: \mathscr{T}_{2r}(\mathscr{V}) \to \mathbf{R}$ 由

$$\mathbf{C} := \mathbf{C}_{(1,r+1)(2,r+2)\cdots(r,2r)} \tag{8}$$

定义，结果是一个标量。

例 5。设 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}_4(\mathscr{V})$。$\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{C}(\Phi^{ij}{}_{kl}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^k \otimes \boldsymbol{g}^l) = \Phi^{ij}{}_{ij}$.

5.3 定义　设 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}_s(\mathscr{V})$，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的 **e-点乘**（自然数 $e \leqslant \min(r, s)$）定义为

$$\boldsymbol{\Phi}(e)\boldsymbol{\Psi} := \mathbf{C}_{(r-e+1,r+1)\cdots(r,r+e)}(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}). \ \square \tag{9}$$

当 $e = 1$ 时，简称**点乘**，并简单用两量并列表示

$$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi} := \mathbf{C}_{(r,r+1)}(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}) = \Phi^{i_1\cdots i_r}\Psi_{j_1\cdots j_s}(\boldsymbol{g}_{i_r}\boldsymbol{g}^{j_1})$$

$$\cdot (\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{r-1}} \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_s})$$

$$= \Phi^{i_1\cdots i_{r-1}p}\Psi_{pj_2\cdots j_s}\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{r-1}} \otimes \boldsymbol{g}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_s}. \tag{10}$$

当 $e = 2$ 时，称为**双点乘**，简记为

$$\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{\Psi} = \Phi^{i_1\cdots i_{r-2}pq}\Psi_{pqj_3\cdots j_s}\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{r-2}} \otimes \boldsymbol{g}^{j_3} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_s}. \tag{11}$$

3-点乘用“⋮”表示。$e > 3$ 时仍用 (9) 的一般表示。

5.4 定义　当 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}_e(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的 e-点乘称为它们的**全点乘**，以 $\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi}$ 记之。根据 (8)，我们有

$$\boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi} := \mathbf{C}(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi}). \tag{12}$$

例 6。$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V} = \mathscr{T}_1(\mathscr{V}): \boldsymbol{u} \odot \boldsymbol{v} = \mathbf{C}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$. (13)

例 7。$\forall \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V}): \boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{T} = \mathbf{C}(\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{T} = S^{ij}T_{ij}$. (14)

例 8。$\forall \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}_3(\mathscr{V}): \boldsymbol{\Phi} \odot \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi} \vdots \boldsymbol{\Psi} = \Phi^{ijk}\Psi_{ijk}$. (15)

两个以上张量也可以进行点乘，亦归结为张量积后再缩并。举例如下

例 9. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$; $\boldsymbol{T} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$:

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \mathrm{C}_{(1,2)(3,4)}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{v}) = u^r T_{rs} v^s \in \mathbf{R}.$$

上式也可写成 $(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$，但 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}$ 之类的写法却是没有意义的。

例 10. 设 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{E} \in \mathscr{T}_4(\mathscr{V})$，

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{C}_{(1,3)(2,4)(5,7)(6,8)}(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}) = E_{ijkl}\varepsilon^{ij}\varepsilon^{kl}. \tag{16}$$

5.5 定理 设 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，则

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = \mathrm{C}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r), \ \forall \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V}. \tag{17}$$

证明 对于 r 阶简单张量 $\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r$，有

$$\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1)\cdots(\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r)$$

$$= (\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r)\binom{r}{\cdot}(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r)$$

$$= \mathbf{C}(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r\otimes\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r).$$

考虑到任何 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 均可表为有限个 r 阶简单张量的线性组合及全缩并是线性算子，就得证 (17)。

§6 对称和反称

6.1 定义 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于第 p 和 q $(1 \leqslant p, q \leqslant r,\ p \neq q)$ 变量为**对称**，如果

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \cdots, \boldsymbol{v}_p, \cdots, \boldsymbol{v}_r), \ \forall \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V}. \tag{1}$$

6.2 定理 上述张量满足 (1)，当且仅当

$$\Phi_{\cdots i_p \cdots i_q \cdots} = \Phi_{\cdots i_q \cdots i_p \cdots} \tag{2}$$

或等价地

$$\Phi^{\cdots i_p \cdots i_q \cdots} = \Phi^{\cdots i_q \cdots i_p \cdots}, \tag{3}$$

$$\Phi^{\cdots i_p \cdots}{}_{i_q \cdots} = \Phi^{\cdots}{}_{i_q}{}^{\cdots i_p \cdots} \ \text{等}, \tag{4}$$

证明 仅对(2)进行证明。利用张量分量定义和(1)，从

$$\begin{aligned}\Phi_{\cdots i_p\cdots i_q\cdots} &= \boldsymbol{\Phi}(\cdots \boldsymbol{g}_{i_p}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_q}, \cdots)\\ &= \boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{g}_{i_q}, \cdots, \boldsymbol{g}_{i_p}, \cdots)\\ &= \Phi_{\cdots i_q\cdots i_p\cdots}\end{aligned}$$

得必要性。而利用张量的表示式和(2)，从

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{v}_p, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \cdots)\\ &= \Phi_{\cdots i_p\cdots i_q\cdots}\cdots \boldsymbol{g}^{i_p}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_q}\cdots(\cdots, \boldsymbol{v}_p, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \cdots)\\ &= \Phi_{\cdots i_q\cdots i_p\cdots}\cdots(\boldsymbol{g}^{i_p}\boldsymbol{v}_p)\cdots(\boldsymbol{g}^{i_q}\boldsymbol{v}_q)\cdots\\ &= \Phi_{\cdots i_q\cdots i_p\cdots}\cdots(\boldsymbol{g}^{i_q}\boldsymbol{v}_q)\cdots(\boldsymbol{g}^{i_p}\boldsymbol{v}_p)\cdots\\ &= \boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{v}_q, \cdots, \boldsymbol{v}_p, \cdots),\end{aligned}$$

又得充分性。□

因此，可以等价地用分量的上(或下)标的对称性来定义张量的对称性。这是古典张量运算的做法。但这种定义要求证明与基的选择无关。

6.3 定义 如果 $\forall p, q(\neq p)\in A\subset\{1, \cdots, r\}$，(1)式成立，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 称作关于属 A 编号的变量为对称；若 $A=\{1, \cdots, r\}$，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于所有变量为对称，这时，$\boldsymbol{\Phi}$ 称为**对称张量**。

例 1. 根据定理 6.2，二阶对称张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量满足

$$T_{ij}=T_{ji},\ T^{ij}=T^{ji},\ T^i{}_j=T_j{}^i.$$

可见，$[T_{ij}]$ 和 $[T^{ij}]$ 是对称矩阵。

例 2. 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$，则 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ 是二阶对称张量，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{u}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{v}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{x})\\ &= (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

或从分量看

$$S_{ij}=u_iv_j+v_iu_j=u_jv_i+v_ju_i=S_{ji}.$$

6.4 定义 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于第 p 和 $q(1\leqslant p, q\leqslant r, p\neq q)$ 变量为**反称**，如果

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\\&=-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_r),\ \forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in\mathscr{V}.\end{aligned}\tag{5}$$

6.5 定理 上述张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足(5)，当且仅当

$$\Phi_{\cdots i_p\cdots i_q\cdots}=-\Phi_{\cdots i_q\cdots i_p\cdots}\tag{6}$$

或等价地

$$\Phi^{\cdots i_p\cdots i_q\cdots}=-\Phi^{\cdots i_q\cdots i_p\cdots},\tag{7}$$

$$\Phi^{\cdots i_p\cdots}{}_{i_q\cdots}=-\Phi^{\cdots}{}_{i_q}{}^{\cdots i_p\cdots}\ \text{等}\square\tag{8}$$

证法和定理 6.2 相同．类似地，也可用分量关于指标的反称性来定义张量的反称性．

6.6 定理 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于第 p 和 q 变量为反称，当且仅当

$$\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots)=0,\ \forall\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_q\in\mathscr{V}.\tag{9}$$

证明 令 $\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_q=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}''$，并利用线性性质，得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'',\cdots,\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}'',\cdots)\\&=\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}',\cdots,\boldsymbol{v}',\cdots)+\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}',\cdots,\boldsymbol{v}'',\cdots)\\&\quad+\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}'',\cdots,\boldsymbol{v}',\cdots)\\&\quad+\boldsymbol{\Phi}(\cdots,\boldsymbol{v}'',\cdots,\boldsymbol{v}'',\cdots).\end{aligned}$$

根据(9)，上式左端及右端第 1 和第 4 项等于零，余下两项给出(5)．充分性得证．为了证明必要性，只要在(5)中取 $\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{v}_q$，就得(9)．

6.7 定义 如果 $\forall p,q(\neq p)\in A\subset\{1,\cdots r\}$，(5)式成立，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 称为关于属 A 编号的变量为反称；若 $A=\{1,\cdots,r\}$，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于所有变量为反称，这时，$\boldsymbol{\Phi}$ 称为**反称张量**．

例 3. 二阶反称张量 $\boldsymbol{A}$ 的分量满足

$$A_{ij}=-A_{ji},\ A^{ij}=-A^{ji},\ A^i{}_j=-A_j{}^i,$$

可见，$[A_{ij}]$ 和 $[A^{ij}]$ 是反称矩阵．

例 4. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ 是二阶反称张量，因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{u}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

$$= -(\boldsymbol{u}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{y})(\boldsymbol{u}\boldsymbol{x})$$
$$= (-\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$
$$= -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}),$$

或从分量看

$$A_{ij} = u_i v_j - v_i u_j = -u_j v_i + v_j u_i$$
$$= -(u_j v_i - v_j u_i) = -A_{ji}.$$

§7 置换算子，对称化和反称化

7.1 定义 对 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$，**置换算子**是一个映射

$$\mathbf{T}_\sigma:\ \mathscr{T}_r(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_r(\mathscr{V}):\ \boldsymbol{\Phi} \longmapsto \mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi},$$

定义如下：

$$\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(r)}),$$
$$\forall \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V}. \quad \square \tag{1}$$

它是一个线性映射，因为由

$$\mathbf{T}_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(r)})$$
$$= \alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(r)}) + \beta\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(r)})$$
$$= \alpha\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) + \beta\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$$
$$= (\alpha\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi} + \beta\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$$

有

$$\mathbf{T}_\sigma(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi} + \beta\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Psi},$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R};\ \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{T}_r(\mathscr{V}). \tag{2}$$

现看当 $\boldsymbol{\Phi}$ 是简单张量的情形：$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r$，我们有

$$\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r)(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$$
$$= \boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(r)})$$
$$= (\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_{\sigma(1)})\cdots(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_{\sigma(i)})\cdots(\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_{\sigma(r)}). \tag{3}$$

如果 $\sigma(i) = j$，则 $i = \sigma^{-1}(j)$，$\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_{\sigma(i)} = \boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(j)}\boldsymbol{v}_j$。 上式右端是 r 个实数的乘积，次序可交换，今将它们按 j 的顺序排列，则上式右端等于

$$(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(1)}\boldsymbol{v}_1)\cdots(\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(r)}\boldsymbol{v}_r)$$

$$= (\boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(r)})(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r). \tag{4}$$

比较上两式就得

$$\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{u}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_r) = \boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_{\sigma^{-1}(r)}. \tag{5}$$

特别地，当 σ 是第 p 和 q 两元素的换位时，即 $\sigma(p)=q$，$\sigma(q)=p$，其余 $\sigma(i)=i$，有

$$\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{u}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_r) \equiv \mathbf{T}_{(p,q)}(\cdots \boldsymbol{u}_p \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_q \cdots)$$

$$= \boldsymbol{u}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_q \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_p \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{u}_r. \tag{6}$$

现看 $\boldsymbol{\Phi}$ 为任意 $\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}$ 的情形。考虑到算子的线性性质和(5)，我们有

$$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1 \cdots i_r} \mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r})$$

$$= \Phi^{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{\sigma^{-1}(i_r)}.$$

考虑到 $\sigma(i)=j \Longrightarrow i=\sigma^{-1}(j)$，并将指标重新编号，上式变为

$$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi} = \Phi^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}. \tag{7}$$

可见，$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi}$ 的分量 $(\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi})^{i_1 \cdots i_r}$ 等于原张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的，经过指标置换 σ 的分量 $\Phi^{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_r)}$。

例 1. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathscr{T}_1(\mathscr{V})$：$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$。

例 2. 2 元置换群 $\mathfrak{S}_2$ 只有两个元素，即只有一种置换可能性，因此，$\forall \boldsymbol{B} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$，可一义地记 $\mathbf{B}^* := \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{B}$。于是

$$\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^* = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}, \tag{8}$$

$$\mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^* = (B_{ij} \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j)^* = B_{ij} \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^i = B_{ji} \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j. \tag{9}$$

我们称 $\boldsymbol{B}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置。

用置换算子于$\left\{\begin{matrix}\text{对称}\\\text{反称}\end{matrix}\right\}$张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的定义性质，我们有

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ \operatorname{sgn}\sigma \end{matrix}\right\} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(r)})$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 \\ \operatorname{sgn}\sigma \end{matrix}\right\} \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r),$$

$$\forall \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V};\ \sigma \in \mathfrak{S}_r.$$

于是，有

7.2 定理 r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 为$\left\{\begin{matrix}\text{对称}\\\text{反称}\end{matrix}\right\}$，当且仅当

$$\boldsymbol{\Phi}=\left\{\begin{matrix}1\\ \operatorname{sgn}\sigma\end{matrix}\right\}\mathrm{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi},\quad\forall_\sigma\in\mathfrak{S}_r. \tag{10}$$

7.3 定义 设有 p 元集 $A\subset\{1,\cdots,r\}$. 关于 A 编号的 p 个变量的**(部分)对称化算子** $\mathscr{S}_A$ 和**(部分)反称化算子** $\mathscr{A}_A$ 是两个映射，分别定义如下:

$$\mathscr{S}_A:\ \mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_r(\mathscr{V}):\ \boldsymbol{\Phi}\longmapsto\mathscr{S}_A\boldsymbol{\Phi}$$

$$:=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}, \tag{11}$$

$$\mathscr{A}_A:\ \mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_r(\mathscr{V}):\ \boldsymbol{\Phi}\longmapsto\mathscr{A}_A\boldsymbol{\Phi}$$

$$:=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\operatorname{sgn}\sigma\mathrm{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}.\quad\square \tag{12}$$

显然，T_σ 的线性性质导至 $\mathscr{S}_A$ 和 $\mathscr{A}_A$ 是线性映射.

例 3. 设 $\boldsymbol{F}=F^{ijkl}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l$, 2 元集 $A=\{1,3\}\subset\{1,2,3,4\}$, 则根据 (7), 我们有

$$\mathscr{S}_A\boldsymbol{F}=\frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\mathrm{T}_\sigma\boldsymbol{F}=\frac{1}{2!}(F^{ijkl}+F^{kjil})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$\equiv F^{(i|j|k)l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l,$$

$$\mathscr{A}_A\boldsymbol{F}=\frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\operatorname{sgn}\sigma\mathrm{T}_\sigma\boldsymbol{F}=\frac{1}{2!}(F^{ijkl}-F^{kjil})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$\equiv F^{[i|j|k]l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l.$$

这里我们把参与对称化和反称化的指标分别用"圆"和"方"括号括起来,中间不参与的指标用两竖隔离开. 又如

例 4. 仍用上例 $\boldsymbol{F}$, 但 A 为 3 元集 $\{1, 2, 4\}$, 则

$$\mathscr{S}_A\boldsymbol{F}=\frac{1}{3!}(F^{ijkl}+F^{jlki}+F^{likj}+F^{ljki}$$

$$+F^{ilkj}+F^{jikl})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$=F^{(ij|k|l)}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l,$$

$$\mathscr{A}_A\boldsymbol{F}=\frac{1}{3!}(F^{ijkl}+F^{jlki}+F^{likj}-F^{ljki}$$

$$-F^{ilkj}-F^{jikl})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$= F^{[ij|k|l]} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k \otimes \boldsymbol{g}_l.$$

7.4 定义 如果在上一定义中的 $\Lambda = \{1, \cdots, r\}$，则有（完全）对称化算子 $\mathscr{S}$ 和（完全）反称化算子 $\mathscr{A}$，定义如下：

$$\mathscr{S}: \mathscr{T}_r(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_r(\mathscr{V}): \boldsymbol{\Phi} \longmapsto \mathscr{S}\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \mathrm{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi}, \tag{13}$$

$$\mathscr{A}: \mathscr{T}_r(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_r(\mathscr{V}): \boldsymbol{\Phi} \longmapsto \mathscr{A}\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn}\sigma \mathrm{T}_\sigma \boldsymbol{\Phi}. \tag{14}$$

例 5. 设 $\boldsymbol{B} = B^{ij} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$，则

$$\mathscr{S}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \mathrm{T}_{(1,2)}\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^*) = \frac{1}{2}(B^{ij} + B^{ji}) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j = B^{(ij)} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j, \tag{15}$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^*) = \frac{1}{2}(B^{ij} - B^{ji}) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j = B^{[ij]} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j. \tag{16}$$

例 6. 设 $\boldsymbol{A} = A^{ijk} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k$，则

$$\mathscr{S}\boldsymbol{A} = \frac{1}{3!}(A^{ijk} + A^{jki} + A^{kij} + A^{kji} + A^{ikj} + A^{jik}) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k = A^{(ijk)} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k, \tag{17}$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{A} = \frac{1}{3!}(A^{ijk} + A^{jki} + A^{kij} - A^{kji} - A^{ikj} - A^{jik}) \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k = A^{[ijk]} \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}_k. \tag{18}$$

一般地，我们有

$$\mathscr{S}\boldsymbol{\Phi} = \mathscr{S}(\Phi^{i_1 \cdots i_r} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}) = \Phi^{(i_1 \cdots i_r)} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}, \tag{19}$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{[i_1 \cdots i_r]} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}, \tag{20}$$

其中

$$\Phi^{(i_1\cdots i_r)} := \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}, \tag{21}$$

$$\Phi^{[i_1\cdots i_r]} := \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\mathrm{sgn}\sigma\Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}. \tag{22}$$

7.5 定理 反称化算子有下列性质:

(i) $\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}$ 为反称(即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{sgn}\tau\mathbf{T}_\tau\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}, \forall\tau\in\mathfrak{S}_r$), (23)

(ii) $\mathscr{A}\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_\tau\mathscr{A}$, $\forall\tau\in\mathfrak{S}_r$, (24)

(iii) $\boldsymbol{\Phi}$ 为反称(即 $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{sgn}\tau\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}$, $\forall\tau\in\mathfrak{S}_r$) $\Longleftrightarrow \mathscr{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}$, (25)

(iv) $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, (26)

(v) $\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}) = \mathscr{A}(\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathscr{A}\boldsymbol{\Psi})$. (27)

证明 $\forall\tau\in\mathfrak{S}_r$; $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$, 利用置换算子的线性性质,从

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\tau(\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}) &= \frac{1}{r!}\sum_\sigma \mathrm{sgn}\sigma\mathbf{T}_\tau(\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi})\\ &= \frac{\mathrm{sgn}\tau}{r!}\sum_{\sigma\tau}\mathrm{sgn}(\sigma\tau)\mathbf{T}_{\sigma\tau}\boldsymbol{\Phi}\\ &= \mathrm{sgn}\tau\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}\end{aligned} \tag{28}$$

得证(i). 这里用到 $\mathbf{T}_\tau(\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r) = \mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\tau(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\tau(r)}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma\tau(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma\tau(r)})$. 计算

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}) &= \frac{1}{r!}\sum_\sigma \mathrm{sgn}\sigma\mathbf{T}_\sigma(\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi})\\ &= \frac{\mathrm{sgn}\tau}{r!}\sum_{\tau\sigma}\mathrm{sgn}(\tau\sigma)\mathbf{T}_{\tau\sigma}\boldsymbol{\Phi}\\ &= \mathrm{sgn}\tau\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}.\end{aligned} \tag{29}$$

比较(28)和(29),得证(ii). 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 为反称,将式 $(10)_2$ 代入反称化定义式(14),得

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{r!}\sum_\sigma\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}.$$

(iii) 的必要性得证. 据(i), $\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}$ 为反称,由 $\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}$ 即得 $\boldsymbol{\Phi}$ 为反称的结论,此即(iii)的充分性证明. 为了证(iv),任取

$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，则根据 (i) $\boldsymbol{\Psi}:=\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}$ 为反称. 又根据 (iii) $\mathscr{A}\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Psi}$，即 $\mathscr{A}^2\boldsymbol{\Phi}=\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}$. 由 $\boldsymbol{\Phi}$ 的任意性，得 (iv). 现来证 (v). 任取 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$. 令 $\tau\in\mathfrak{S}_r$，并定义 $\sigma\in\mathfrak{S}_{r+s}$ 如下：

$$\sigma=\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r & i_{r+1}\cdots i_{r+s}\\ \tau(i_1) & \cdots & \tau(i_r) & i_{r+1}\cdots i_{r+s}\end{pmatrix}.$$

这时 $\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}\tau$ 及 $\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})$. 于是，根据 (29)，有

$$\mathscr{A}(\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\mathscr{A}(\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}))=\operatorname{sgn}\sigma\,\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}),$$

即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\operatorname{sgn}\tau\,\mathscr{A}(\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\mathscr{A}(\operatorname{sgn}\tau\,\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}).$$

注意到，$\forall\tau\in\mathfrak{S}_r$，上式右端恒等于与 τ 无关的左端. 令 τ 取遍 $\mathfrak{S}_r$，求和并除以 $r!$，就得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})&=\mathscr{A}\left(\frac{1}{r!}\sum_\tau\operatorname{sgn}\tau\,\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\\&=\mathscr{A}\left(\left(\frac{1}{r!}\sum_\tau\operatorname{sgn}\tau\,\mathbf{T}_\tau\boldsymbol{\Phi}\right)\otimes\boldsymbol{\Psi}\right)\\&=\mathscr{A}(\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}).\end{aligned}$$

此即 (v) 的第一式. 类似地可证第二式.

§8 外形式和外积

8.1 定义 反称张量又称为**外形式**，而 r 阶反称张量则称为 **r-形式**. 将张量空间 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的“张量加法”和“数乘”运算限制于外形式，运算结果仍是外形式. 全体 r-形式是 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的一个子空间，称为在 $\mathscr{V}$ 上的 **r-形式空间**，记作 $\Lambda_r(\mathscr{V})$.

8.2 定义 设有两外形式空间 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 和 $\Lambda_s(\mathscr{V})$. **外积**是按下述定义的映射：

$$\wedge:\ \Lambda_r(\mathscr{V})\times\Lambda_s(\mathscr{V})\to\Lambda_{r+s}(\mathscr{V}):\ (\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})\longmapsto\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}$$

$$:=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}).\tag{1}$$

$\Phi\wedge\Psi$ 称为 Φ 和 Ψ 的外积. 张量积是双线性的，而 $\mathscr{A}$ 是线性映射,则由 (1) 可知,外积是双线性映射. □

两个外形式的外积是外形式，它又可和另一个外形式进行外积。因此，谈论若干个外形式的外积是有意义的。

8.3 定理 设 $\Phi\in\Lambda_r(\mathscr{V})$, $\Psi\in\Lambda_s(\mathscr{V})$ 和 $\Theta\in\Lambda_t(\mathscr{V})$. 外积满足

(i) 结合律 $(\Phi\wedge\Psi)\wedge\Theta=\Phi\wedge(\Psi\wedge\Theta)=\Phi\wedge\Psi\wedge\Theta$, (2)

(ii) 反交换律 $\Phi\wedge\Psi=(-1)^{rs}\Psi\wedge\Phi$. (3)

证明 根据反称化算子的性质 (v)，有

$$
\begin{aligned}
(\Phi\wedge\Psi)\wedge\Theta &= \frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!}\mathscr{A}((\Phi\wedge\Psi)\otimes\Theta)\\
&= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi)\otimes\Theta)\\
&= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi\otimes\Theta)\\
&= \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\Phi\otimes\mathscr{A}(\Psi\otimes\Theta))\\
&= \frac{(r+s+t)!}{r!(s+t)!}\mathscr{A}(\Phi\otimes(\Psi\wedge\Theta))\\
&= \Phi\wedge(\Psi\wedge\Theta).
\end{aligned}
$$

这样，就可以笼统地写 $\Phi\wedge\Psi\wedge\Theta$. (i) 得证. 证 (ii) 等价于证 $\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi)=(-1)^{rs}\mathscr{A}(\Psi\otimes\Phi)$. 为此，定义 $\tau\in\mathfrak{S}_{r+s}\equiv\mathfrak{S}$ 如下：

$$
\tau := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & s+r \\ r+1 & \cdots & r+s & 1 & \cdots & r \end{pmatrix}, \tag{4}
$$

则

$$
\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{rs} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi)(v_1,\cdots,v_{r+s})\\
&= \frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}}\operatorname{sgn}\sigma\,\mathbf{T}_\sigma(\Phi\otimes\Psi)(v_1,\cdots,v_{r+s})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \operatorname{sgn}\sigma (\Phi \otimes \Psi)(v_{\sigma(1)}, \cdots v_{\sigma(r+s)})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \operatorname{sgn}\sigma \Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(r)})$$

$$\Psi(v_{\sigma(r+1)}, \cdots, v_{\sigma(r+s)})$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \Psi(v_{\sigma(r+1)}, \cdots, v_{\sigma(r+s)})$$

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(r)})$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}\tau}{(r+s)!} \sum_{\sigma\tau} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \Psi(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(s)})$$

$$\Phi(v_{\sigma\tau(s+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(s+r)})$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{(r+s)!} \sum_{\sigma\tau} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \Psi \otimes \Phi(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(s+r)})$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{(r+s)!} \sum_{\sigma\tau} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \mathrm{T}_{\sigma\tau}(\Psi \otimes \Phi)(v_1, \cdots, v_{s+r})$$

$$= (-1)^{rs} \mathscr{A}(\Psi \otimes \Phi)(v_1, \cdots, v_{s+r}).$$

由 $v_1, \cdots, v_{r+s}$ 的任意性，得证(ii)。□

根据前面的讨论，很自然地按下述方式

$$\wedge(\Phi_1, \cdots, \Phi_s) := \Phi_1 \wedge \cdots \wedge \Phi_s$$

$$= \frac{(r_1 + \cdots + r_s)!}{r_1! \cdots r_s!} \mathscr{A}(\Phi_1 \otimes \cdots \otimes \Phi_s),$$

$$\forall \Phi_\gamma \in \Lambda_{r_\gamma}(\mathscr{V}), \quad \gamma = 1, \cdots, s, \tag{6}$$

将外积映射推广至任意 s 个外形式空间

$$\wedge : \Lambda_{r_1}(\mathscr{V}) \times \cdots \times \Lambda_{r_s}(\mathscr{V}) \to \Lambda_{r_1 + \cdots + r_s}(\mathscr{V}).$$

容易验证，这种映射是多重线性的:

$$\wedge(\cdots, \alpha\Phi_i + \beta\Phi_i', \cdots) = \alpha \wedge (\cdots, \Phi_i, \cdots)$$

$$+ \beta \wedge (\cdots, \Phi_i', \cdots), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}; \ \Phi_i, \Phi_i' \in \Lambda_{r_i}(\mathscr{V}). \tag{7}$$

在最简单情况下，每个 Φ_γ 都是1-形式(即向量)，则 $u_1 \wedge \cdots \wedge u_s$ 便是**简单外形式**，它在 $v_1, \cdots, v_s \in \mathscr{V}$ 上的值是

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_s(v_1, \cdots, v_s)$$

$$= s! \mathscr{A}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_s)(v_1, \cdots, v_s)$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_s} \operatorname{sgn}\sigma \mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_s)(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s)$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_s} \operatorname{sgn}\sigma(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_s)(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(s)})$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_s} \operatorname{sgn}\sigma(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_{\sigma(1)})\cdots(\boldsymbol{u}_s\boldsymbol{v}_{\sigma(s)}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_s \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_s\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{u}_s\boldsymbol{v}_s \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_s} \operatorname{sgn}\sigma(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}\boldsymbol{v}_1)\cdots(\boldsymbol{u}_{\sigma(s)}\boldsymbol{v}_s)$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_s} \operatorname{sgn}\sigma(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{\sigma(s)})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s).$$

由 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s$ 的任意性，我们有

$$\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_s = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_s} \operatorname{sgn}\sigma(\boldsymbol{u}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_{\sigma(s)}). \tag{9}$$

对于 $s=2$，

$$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v} = 2\mathscr{A}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}.$$

$\Lambda_r(\mathscr{V})$ 既然是向量空间，也就有基和维数的问题。

8.4 定理 若 $r>n=\dim\mathscr{V}$，则 $\Lambda_r(\mathscr{V})=\{\boldsymbol{O}\}$；而对 $0\leqslant r\leqslant n$，我们有 $\dim\Lambda_r(\mathscr{V})=\binom{n}{r}$. $\mathscr{V}$ 的逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 诱导出 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的一组基 $\{\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r}|i_1<\cdots<i_r\}$.

证明 设 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的逆变基，$\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$. 若 $r>n$，则 r 个基向量中必有重复者，根据定理 6.6，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})=0$，从而任何 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{O}$，即 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 只包含一个元素——零元素。

对于 $0\leqslant r\leqslant n$，作为张量，$\boldsymbol{\Phi}$ 可表成

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r} \tag{10}$$

作为反称张量，根据 (7.25) 和 (6)，进一步又有

$$\boldsymbol{\Phi}=\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{i_1\cdots i_r}\mathscr{A}(\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r})$$

$$=\frac{1}{r!}\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r}. \tag{11}$$

$\{\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r}\}$ 并非线性无关组，因，根据 (8)，只要有相同指标的基向量，则简单 r-形式 $\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r}=\boldsymbol{O}$，而且，根据 (3)，对

一固定的但各不相同的指标组 $\{i_1, \cdots, i_r\}$，又有

$$g^{\sigma(i_1)}\wedge\cdots\wedge g^{\sigma(i_r)}=\operatorname{sgn}\sigma g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}. \tag{12}$$

因此，实质不同的非零简单 r-形式共为

$$\{g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}|i_1<\cdots<i_r\}. \tag{13}$$

该 r-形式组 (13) 是线性无关的，因

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}\mu_{i_1\cdots i_r}g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}=O \tag{14}$$

导致

$$\mu_{i_1\cdots i_r}=0,\quad i_1<\cdots<i_r. \tag{15}$$

事实上，(14) 式左端是零 r-形式，它的任何算值为零，即(利用 (8))

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\mu_{i_1\cdots i_r}g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}(g_{j_1},\cdots,g_{j_r})\\
&=r!\sum_{i_1<\cdots<i_r}\mu_{i_1\cdots i_r}\mathscr{A}(g^{i_1}\otimes\cdots\otimes g^{i_r})(g_{j_1},\cdots,g_{j_r})\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\mu_{i_1\cdots i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma(g^{i_1}g_{\sigma(j_1)})\cdots(g^{i_r}g_{\sigma(j_r)})\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\mu_{i_1\cdots i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\cdots\delta^{i_r}_{\sigma(j_r)}.
\end{aligned}$$

只要在上式依次取遍不同的 $j_1, \cdots, j_r$，则每一次总有一个排列 σ 和一组 $i_1<\cdots<i_r$，使得 $\sigma(j_1)=i_1, \cdots, \sigma(j_r)=i_r$，从而得 (15)。

根据定理 6.5，反称张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的分量关于其指标是反称的：对应于同一组指标 $i_1<\cdots<i_r$ 的非零分量有关系式

$$\Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}=\operatorname{sgn}\sigma\Phi_{i_1\cdots i_r} \tag{16}$$

将 (12) 和 (16) 代入 (11)，不计等于零的项，就有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}&=\frac{1}{r!}\sum_{i_1<\cdots<i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}g^{\sigma(i_1)}\wedge\cdots\wedge g^{\sigma(i_r)}\\
&=\frac{1}{r!}\sum_{i_1<\cdots<i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(\operatorname{sgn}\sigma\Phi_{i_1\cdots i_r})(\operatorname{sgn}\sigma g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r})\\
&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}.
\end{aligned}\tag{17}$$

可见，(13) 是 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的一组基，它包含

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\binom{n}{r} \tag{18}$$

个简单 r-形式。因此，$\dim\Lambda_r(\mathscr{V})=\binom{n}{r}$. $\boldsymbol{\Phi}$ 在基 (13) 上的分解系数组

$$\{\Phi_{i_1\cdots i_r}|i_1<\cdots<i_r\} \tag{19}$$

称为 r-形式 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**严格分量**(或**独立分量**)，它们是直接从 $\boldsymbol{\Phi}$ 的各张量分量取包含不相同而顺序指标的那些。□

同样可以证明

8.5 定理 对应于 $\mathscr{V}$ 的协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$，$\{\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_r}|i_1<\cdots<i_r\}$ 也是 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的一组基. 任何 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$ 在此基上的表示式为

$$\boldsymbol{\Phi}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_r}, \tag{20}$$

其中 $\Phi^{i_1\cdots i_r}$ 是严格分量，也是直接从相应的张量分量取不同而顺序指标的那些。

8.6 定理 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的协变和逆变严格分量的关系式是

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}=\sum_{j_1<\cdots<j_r}\begin{vmatrix}g^{i_1j_1}&\cdots&g^{i_1j_r}\\ \vdots&&\\ g^{i_rj_1}&\cdots&g^{i_rj_r}\end{vmatrix}\Phi_{j_1\cdots j_r}, \tag{21}$$

$$\Phi_{i_1\cdots i_r}=\sum_{j_1<\cdots<j_r}\begin{vmatrix}g_{i_1j_1}&\cdots&g_{i_1j_r}\\ \vdots&&\\ g_{i_rj_1}&\cdots&g_{i_rj_r}\end{vmatrix}\Phi^{j_1\cdots j_r}. \tag{22}$$

证明 根据 (3.7)，$\boldsymbol{\Phi}$ 的协变和逆变张量分量的关系是

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}=g^{i_1j_1}\cdots g^{i_rj_r}\Phi_{j_1\cdots j_r}. \tag{23}$$

外形式的反称性使得，非零张量分量具有不重复指标，而具有不重复指标 $\{j_1,\cdots,j_r\}$ 的张量分量为 $r!$ 个，构成一组，组中每分量可表成

$$\Phi_{\sigma(j_1)\cdots\sigma(j_r)}=\operatorname{sgn}\sigma\Phi_{j_1\cdots j_r},\quad j_1<\cdots<j_r, \tag{24}$$

这样，(23) 就可写成

$$\Phi^{i_1\cdots i_r} = \sum_{j_1<\cdots<j_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} g^{i_1\sigma(j_1)}\cdots g^{i_r\sigma(j_r)}\Phi_{\sigma(j_1)\cdots\sigma(j_r)}$$

$$= \sum_{j_1<\cdots<j_r}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma g^{i_1\sigma(j_1)}\cdots g^{i_r\sigma(j_r)}\right)\Phi_{j_1\cdots j_r}. \qquad (25)$$

括号中的表达式就是(21)式中的各行列式。同理可证(22)。

8.7 定理 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的协变基和逆变基的关系是

$$g_{i_1}\wedge\cdots\wedge g_{i_r} = \sum_{j_1<\cdots<j_r}\begin{vmatrix} g_{i_1j_1}\cdots g_{i_1j_r}\\ \vdots \\ g_{i_rj_1}\cdots g_{i_rj_r}\end{vmatrix} g^{j_1}\wedge\cdots\wedge g^{j_r}, \qquad (26)$$

$$g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r} = \sum_{j_1<\cdots<j_r}\begin{vmatrix} g^{i_1j_1}\cdots g^{i_1j_r}\\ \vdots \\ g^{i_rj_1}\cdots g^{i_rj_r}\end{vmatrix} g_{j_1}\wedge\cdots\wedge g_{j_r}. \qquad (27)$$

证明 类似于上一定理，关键在利用(12)式。

$$g_{i_1}\wedge\cdots\wedge g_{i_r} = g_{i_1j_1}\cdots g_{i_rj_r}g^{j_1}\wedge\cdots\wedge g^{j_r}$$

$$= \sum_{j_1<\cdots<j_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} g_{i_1\sigma(j_1)}\cdots g_{i_r\sigma(j_r)}g^{\sigma(j_1)}\wedge\cdots\wedge g^{\sigma(j_r)}$$

$$= \sum_{j_1<\cdots<j_r}\left(\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma g_{i_1\sigma(j_1)}\cdots g_{i_r\sigma(j_r)}\right)g^{j_1}\wedge\cdots\wedge g^{j_r}.$$

此式即(26 的右端。同理可证(27)。□

例 1. 求 $\Phi = u^1\wedge\cdots\wedge u^r$ 的严格分量。利用(8)和(7.22)，有

$$\Phi_{i_1\cdots i_r} = u^1\wedge\cdots\wedge u^r(g_{i_1},\cdots,g_{i_r})$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma(u^1 g_{\sigma(i_1)})\cdots(u^r g_{\sigma(i_r)})$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma u^1_{\sigma(i_1)}\cdots u^r_{\sigma(i_r)} = r!\,u^1_{[i_1}\cdots u^r_{i_r]}$$

$$= \begin{vmatrix} u^1_{i_1}\cdots u^1_{i_r}\\ \vdots \\ u^r_{i_1}\cdots u^r_{i_r}\end{vmatrix}. \qquad (28)$$

例 2. 在三维空间，$B = u\wedge v$ 共有三个严格分量：

$$B_{12}=2u_{[1}v_{2]}=u_1v_2-u_2v_1,\quad B_{13}=u_1v_3-u_3v_1,$$

$$B_{23}=u_2v_3-v_2u_3.$$

这三个分量和 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 的分量相同。此非偶然。

后面我们一般地讨论叉乘和外积的关系。

例 3. 设 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\Lambda_s(\mathscr{V})$，求 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}$ 的严格分量。

$$\begin{aligned}
\Omega_{i_1\cdots i_{r+s}}&=\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_{r+s}})\\
&=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_{r+s}})\\
&=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r+s}}\operatorname{sgn}\sigma\mathbf{T}_\sigma(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_{r+s}})\\
&=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_{\sigma(i_1)},\cdots,\boldsymbol{g}_{\sigma(i_{r+s})})\\
&=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}\Psi_{\sigma(i_{r+1})\cdots\sigma(i_{r+s})}\\
&=\frac{(r+s)!}{r!s!}\Phi_{[i_1\cdots i_r}\Psi_{i_{r+1}\cdots i_{r+s}]}.
\end{aligned}\tag{29}$$

这里出现 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的非严格分量。当然也可化成只由严格分量表达。

8.8 定理 当 $\mathscr{V}$ 的逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 转换到 $\{\boldsymbol{g}^{i'}\}$ 时，$\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的基和 r-形式 $\boldsymbol{\Phi}$ 的严格分量的转换式是

$$\boldsymbol{g}^{i'_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i'_r}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\begin{vmatrix}A^{i'_1}_{i_1}&\cdots&A^{i'_1}_{i_r}\\ A^{i'_2}_{i_1}&\cdots&\\ \cdots&&\\ A^{i'_r}_{i_1}&\cdots&A^{i'_r}_{i_r}\end{vmatrix}\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r},\tag{30}$$

$$\Phi_{i'_1\cdots i'_r}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\begin{vmatrix}A^{i_1}_{i'_1}&\cdots&A^{i_r}_{i'_1}\\ A^{i_1}_{i'_2}&\cdots&\\ \cdots&&\\ A^{i_1}_{i'_r}&\cdots&A^{i_r}_{i'_r}\end{vmatrix}\Phi_{i_1\cdots i_r}.\tag{31}$$

证明 将 $g^{i'}=A^{i'}_i g^i$ 代入新基 $\{g^{i'_1}\wedge\cdots\wedge g^{i'_r}|i'_1<\cdots<i'_r\}$ 的元素，得

$$g^{i'_1}\wedge\cdots\wedge g^{i'_r}=A^{i'_1}_{i_1}\cdots A^{i'_r}_{i_r}g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}. \tag{32}$$

右端不带撇指标遵循求和约定，对每组 $i_1<\cdots<i_r$ 伴随有 $(r!-1)$个不属于基 $\{g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}|i_1<\cdots<i_r\}$ 的简单 r-形式，它们可表为

$$g^{\sigma(i_1)}\wedge\cdots\wedge g^{\sigma(i_r)}=\operatorname{sgn}\sigma g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}, \tag{33}$$

于是

$$g^{i'_1}\wedge\cdots\wedge g^{i'_r}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}A^{i'_1}_{\sigma(i_1)}\cdots A^{i'_r}_{\sigma(i_r)}g^{\sigma(i_1)}\wedge\cdots\wedge g^{\sigma(i_r)}$$

$$=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma A^{i'_1}_{\sigma(i_1)}\cdots A^{i'_r}_{\sigma(i_r)}\right)g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}.$$

此即(30)式。再有

$$\begin{aligned}\Phi_{i'_1\cdots i'_r}&=\Phi(g_{i'_1},\cdots,g_{i'_r})\\&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}(g_{i'_1},\cdots,g_{i'_r})\\&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\begin{vmatrix}g^{i_1}g_{i'_1}\cdots g^{i_1}g_{i'_r}\\ \vdots\\ g^{i_r}g_{i'_1}\cdots g^{i_r}g_{i'_r}\end{vmatrix}\Phi_{i_1\cdots i_r}.\end{aligned} \tag{34}$$

考虑到 $g^i g_{i'}=(A^i_{j'}g^{j'})g_{i'}=A^i_{i'}$，上式的各行列式转置后即(31)的各行列式。□

例 4. 根据 $\dim\Lambda_n(\mathscr{V})=\binom{n}{n}=1$，$\Lambda_n(\mathscr{V})$ 的任何不为零的元素，例如 $g^1\wedge\cdots\wedge g^n$，均可作为基. 任意 $\Phi\in\Lambda_n(\mathscr{V})$ 可表为

$$\Phi=\Phi_{1\cdots n}g^1\wedge\cdots\wedge g^n\equiv\alpha g^1\wedge\cdots\wedge g^n, \tag{35}$$

α 是 Φ 的唯一严格分量. 在新基里，根据(31)，有

$$\alpha'=\Phi_{1'\cdots n'}=\det[A^i_{i'}]\Phi_{1\cdots n}=\det[A^i_{i'}]\alpha. \tag{36}$$

8.9 定理 $\{u_1,\cdots,u_r\}$ 是线性相关向量组，当且仅当 $u_1\wedge\cdots\wedge u_r=O$.

证明 对 $r>n$，定理显然成立，因任何 r 个向量线性相关

及 $\Lambda_r(\mathscr{V})=\{O\}$. 下面证 $r\leqslant n$ 情形. 必要性. 设 $\{u_1,\cdots,u_r\}$ 线性相关，则存在不全为零的 r 个数 $\alpha^1,\cdots,\alpha^r$，使得 $\sum_{i=1}^{r}\alpha^i u_i=o$. 不妨设 $\alpha^1=-1$，则 $u_1=\sum_{i=2}^{r}\alpha^i u_i$. 代入这 r 个向量的外积，得

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_r=\sum_{i=2}^{r}\alpha^i u_i\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_r=O, \tag{37}$$

因在上述的和里，每一项 $u_i\wedge u_2\wedge\cdots\wedge u_i\wedge\cdots\wedge u_r$ 都有重复的两个 u_i，从而是零 r-形式.

充分性. 设 $\{u_1,\cdots,u_r\}$是线性无关组，则可这样地添上 $n-r$ 个向量，使 $\{u_i\}$ 成为 $\mathscr{V}$ 的一组基，由此可构造一维的 $\Lambda_n(\mathscr{V})$ 的由一个元素构成的基(基元素不能为零) $u_1\wedge\cdots\wedge u_n\neq O$. 作为它的部分外积当然不能为零：$u_1\wedge\cdots\wedge u_r\neq O$. 这导致与假设矛盾. 故 $\{u_1,\cdots,u_r\}$ 线性相关.

8.10 定义 映射

$$\Diamond:\Lambda_r(\mathscr{V})\times\Lambda_r(\mathscr{V})\to\mathbf{R}:(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})\longmapsto\boldsymbol{\Phi}\Diamond\boldsymbol{\Psi}$$
$$:=\frac{1}{r!}\boldsymbol{\Phi}\odot\boldsymbol{\Psi} \tag{38}$$

称为两 r-形式的**外全点积**，它和两 r 阶张量的全点积只差一个因子，因此也是双线性的.

例 5. 设 $\boldsymbol{\Phi}=u_1\wedge\cdots\wedge u_r$，$\boldsymbol{\Psi}=v_1\wedge\cdots\wedge v_r$. 利用(9)式，它们的外全点积是

$$
\begin{aligned}
&(u_1\wedge\cdots\wedge u_r)\Diamond(v_1\wedge\cdots\wedge v_r)\\
=&\frac{1}{r!}\mathbf{C}((u_1\wedge\cdots\wedge u_r)\otimes(v_1\wedge\cdots\wedge v_r))\\
=&\frac{1}{r!}\mathbf{C}\Big(\Big(\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\, u_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes u_{\sigma(r)}\Big)\\
&\otimes\Big(\sum_{\tau}\operatorname{sgn}\tau\, v_{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\tau(r)}\Big)\Big)\\
=&\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\Big(\sum_{\tau}\operatorname{sgn}\tau(u_{\sigma(1)}v_{\tau(1)})\cdots(u_{\sigma(r)}v_{\tau(r)})\Big)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\begin{vmatrix} u_{\sigma(1)}v_1 & \cdots & u_{\sigma(1)}v_r \\ \vdots & & \\ u_{\sigma(r)}v_1 & \cdots & u_{\sigma(r)}v_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_r \\ \vdots & & \\ u_rv_1 & \cdots & u_rv_r \end{vmatrix} \tag{39}$$

$$= u_1\wedge\cdots\wedge u_r(v_1, \cdots, v_r)$$

$$= v_1\wedge\cdots\wedge v_r(u_1, \cdots, u_r). \tag{40}$$

(40) 是 (8) 的结果。

§9 广义 Kronecker 符号，Ricci 符号和矩阵的行列式

9.1 定义 设 $1\leqslant r\leqslant n$. 两个简单 r-形式 $g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r}$ 和 $g_{j_1}\wedge\cdots\wedge g_{j_r}$ (指标可任取，因而不一定是 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的基元素)的外全点积

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} := (g^{i_1}\wedge\cdots\wedge g^{i_r})\diamond(g_{j_1}\wedge\cdots\wedge g_{j_r}) \tag{1}$$

称为 **r 阶广义 Kronecker 符号.**

9.2 定理 r 阶广义 Kronecker 符号有表达式

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_r} \\ \vdots & & \\ \delta^{i_r}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\cdots\delta^{i_r}_{\sigma(j_r)}. \tag{3}$$

证明 只要将 (8.39) 式用于 (1) 式的右边，并考虑到 $g^i g_j = \delta^i_j$，就得 (2) 式。(3) 式是行列式的展开式。

9.3 定理 r 阶广义 Kronecker 符号的值是

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{cases} 0 & \text{若 } (i_1, \cdots, i_r) \text{ 或 } (j_1, \cdots, j_r) \text{ 有重复元素,} \quad (4) \\ 0 & \text{若 } (i_1, \cdots, i_r) \text{ 和 } (j_1, \cdots, j_r) \text{ 无重复元素,} \\ & \quad \text{但 } \{i_1, \cdots, i_r\} \neq \{j_1, \cdots, j_r\}, \quad (5) \\ \operatorname{sgn}\sigma & \text{若 } (i_1, \cdots, i_r) \text{ 和 } (j_1, \cdots, j_r) \text{ 无重复元素,} \\ & \quad \text{且 } \{i_1, \cdots, i_r\} = \{j_1, \cdots, j_r\}, \text{ 其中} \\ & \quad \sigma(j_k) = i_k,\ k = 1, \cdots, r. \quad (6) \end{cases}$$

证明 用 (1) 式右端可证明情形 (4). 这时 (1) 式至少有一个 r-形式为零. 也可用 (2) 式右端, 这时行列式有相同的行或列. 用 (3) 式右端可证明情形 (6). 该右端是 $r!$ 项之和, 每项是 r 个 Kronecker 符号的乘积. 这些项都等于零,除了使

$$\sigma(j_k)=i_k,\ k=1,\cdots,r \tag{7}$$

的排列对应的那一项,这时该项的各 Kronecker 符号均等于 1, 其积亦为 1, 于是情形 (6) 的值是 $\operatorname{sgn}\sigma$. 余下情形 (5), 由于 $\{i_1,\cdots,i_r\}\neq\{j_1,\cdots,j_r\}$, 不存在满足 (7) 的排列, 从而 (3) 右端各项均为零. □

利用广义 Kronecker 符号的行列式表示式 (2), 可以得出一系列有用的公式. 在 $j_r=i_r$ 情形,只要将该行列式按最后一行展开, 记住求和约定及广义 Kronecker 符号两上标或两下标换位就改变符号, 就得

$$\begin{aligned}
\delta^{i_1\cdots i_{r-1}i_r}_{j_1\cdots j_{r-1}i_r}&=\begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{j_1}&\cdots\delta^{i_1}_{j_{r-1}}&\delta^{i_1}_{i_r}\\ \delta^{i_2}_{j_1}&\cdots&\delta^{i_2}_{i_r}\\ \vdots&&\\ \delta^{i_{r-1}}_{j_1}&\cdots\ \delta^{i_{r-1}}_{j_{r-1}}&\delta^{i_{r-1}}_{i_r}\\ \delta^{i_r}_{j_1}&\cdots\delta^{i_r}_{j_{r-1}}&\delta^{i_r}_{i_r}\end{vmatrix}=\delta^{i_r}_{i_r}\delta^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}}-\delta^{i_r}_{j_{r-1}}\delta^{i_1\cdots i_{r-2}\,i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-2}\,i_r}\\
&\quad+\delta^{i_r}_{j_{r-2}}\delta^{i_1\cdots\quad i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}\,i_r}-\cdots\\
&=n\delta^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}}-\delta^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}}+\delta^{i_1\cdots\quad i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}\,j_{r-2}}-\cdots\\
&=(n-(r-1))\delta^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}}.
\end{aligned}\tag{8}$$

上式也可用 (3) 证明:

$$\delta^{i_1\cdots i_{r-1}\,i_r}_{j_1\cdots j_{r-1}\,i_r}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\cdots\delta^{i_{r-1}}_{\sigma(j_{r-1})}\,\delta^{i_r}_{\sigma(i_r)}.$$

这里 $i_1,\cdots,i_{r-1}$ 是固定指标, i_r 是求和指标. i_r 只能取不同于 $i_1,\cdots,i_{r-1}$ 的 $n-(r-1)$ 个值, 对每个 i_r 的值,由于

$$\delta^{i_r}_{\sigma(i_r)} = \begin{cases} 1, & \sigma(i_r) = i_r, \\ 0, & \sigma(i_r) \neq i_r, \end{cases}$$

只有对这样的置换

$$\sigma = \begin{Bmatrix} j_1 & \cdots j_{r-1} & i_r \\ \tau(j_1) & \cdots \tau(j_{r-1}) & i_r \end{Bmatrix}, \quad \forall \tau \in \mathfrak{S}_{r-1},$$

相应的项才不消失。因此，就有

$$\delta^{i_1\cdots i_{r-1} i_r}_{j_1\cdots j_{r-1} i_r} = (n-(r-1)) \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{r-1}} \operatorname{sgn}\tau\, \delta^{i_1}_{\tau(j_1)}\cdots\delta^{i_{r-1}}_{\tau(j_{r-1})}$$

$$= (n-(r-1))\delta^{i_1\cdots i_{r-1}}_{j_1\cdots j_{r-1}}.$$

反复应用上述公式，又得

$$\delta^{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_k i_{k+1}\cdots i_r} = (n-(r-1))(n-(r-2))\cdots(n-k)\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}$$

$$= \frac{(n-k)!}{(n-r)!}\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}. \tag{9}$$

例 1.

$$\delta^{i i_2\cdots i_r}_{j i_2\cdots i_r} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!}\delta^i_j, \tag{10}$$

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!}\delta^i_i = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{11}$$

$$\delta^{ilp}_{jmp} = \frac{(n-2)!}{(n-3)!}\delta^{il}_{jm} = (n-2)\delta^{il}_{jm}$$

$$= (n-2)\begin{vmatrix} \delta^i_j & \delta^i_m \\ \delta^l_j & \delta^l_m \end{vmatrix}$$

$$= (n-2)(\delta^i_j\delta^l_m - \delta^i_m\delta^l_j), \tag{12}$$

$$\delta^{ipq}_{jpq} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = (n-2)(n-1)\delta^i_j, \tag{13}$$

$$\delta^{ilp}_{ilp} = (n-2)(n-1)n. \tag{14}$$

当 $n=3$ 时，前三式分别变为

$$\delta^{ilp}_{jmp} = \delta^{il}_{jm} = \delta^i_j\delta^l_m - \delta^i_m\delta^l_j, \tag{15}$$

$$\delta^{ipq}_{jpq} = 2\delta^i_j, \quad \delta^{ilp}_{ilp} = 3!, \tag{16}$$

9.4 定义 Ricci 符号是两种特别的广义 Kronecker 符号:

$$e^{i_1\cdots i_n} := (\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_n})\diamond(\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n) = \delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}, \quad (17)$$

$$e_{i_1\cdots i_n} := (\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_n})\diamond(\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n) = \delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}. \quad (18)$$

9.5 推论 Ricci 符号的值为零，如果有重复指标；否则为 $\mathrm{sgn}\sigma$，其中 $\sigma(k)=i_k$，$k=1,\cdots,n$.

9.6 推论

$$e^{i_1\cdots i_n}e_{j_1\cdots j_n} = \delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n}. \quad (19)$$

证明 只需利用 $(17)_2$ 和 $(18)_2$，并将 (2) 代入，即得

$$e^{i_1\cdots i_n}e_{j_1\cdots j_n} = \delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n} = \begin{vmatrix}\delta^{i_1}_1 & \cdots & \delta^{i_1}_n\\ \vdots & & \\ \delta^{i_n}_1 & \cdots & \delta^{i_n}_n\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\delta^1_{j_1} & \cdots & \delta^1_{j_n}\\ \vdots & & \\ \delta^n_{j_1} & \cdots & \delta^n_{j_n}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\delta^{i_1}_p\delta^p_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_p\delta^p_{j_n}\\ \vdots & & \\ \delta^{i_n}_p\delta^p_{j_1} & \cdots & \delta^{i_n}_p\delta^p_{j_n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_n}\\ \vdots & & \\ \delta^{i_n}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_n}_{j_n}\end{vmatrix} = \delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n}.$$

例 2. $$e^{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_n}e_{j_1\cdots j_k i_{k+1}\cdots i_n} = \delta^{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_n}_{j_1\cdots j_k i_{k+1}\cdots i_n}$$

$$= (n-k)!\,\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}, \quad (20)$$

$$e^{i_1\cdots i_n}e_{i_1\cdots i_n} = \delta^{i_1\cdots i_n}_{i_1\cdots i_n} = n!. \quad (21)$$

例 3. 设 $\boldsymbol{\Phi} = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r}$ 和

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_{j_1<\cdots<j_r}\Psi^{j_1\cdots j_r}\boldsymbol{g}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{j_r},$$

利用外全点积的双线性和广义 Kronecker 符号的性质，我们有

$$\boldsymbol{\Phi}\diamond\boldsymbol{\Psi} = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ j_1<\cdots<j_r}}\Phi_{i_1\cdots i_r}\Psi^{j_1\cdots j_r}(\boldsymbol{g}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^{i_r})\diamond(\boldsymbol{g}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{j_r})$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ j_1<\cdots<j_r}}\Phi_{i_1\cdots i_r}\Psi^{j_1\cdots j_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\mathrm{sgn}\sigma\,\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\cdots\delta^{i_r}_{\sigma(j_r)}$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}\Psi^{i_1\cdots i_r}. \quad (22)$$

最后等式的根据：$\sum\limits_{\sigma}\mathrm{sgn}\sigma\,\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\cdots\delta^{i_r}_{\sigma(j_r)}$ 的每一项均等于零，除了在 $\{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_r\}$ 时，对应满足 (7) 的排列的项

等于 sgnσ. 现在两组指标均按顺序排列求和，σ 只能是恒同排列，故 $\text{sgn}\sigma = 1$，从而得 (22) 的结果。

例 4. 当 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \Lambda_n(\mathscr{V})$，我们有

$$\boldsymbol{\Phi} \diamond \boldsymbol{\Psi} = \Phi_{1\cdots n}\Psi^{1\cdots n} = \Phi^{1\cdots n}\Psi_{1\cdots n} = g_{1i_1}\cdots g_{ni_n}\Phi^{1\cdots n}\Psi^{i_1\cdots i_n}. \quad (23)$$

上式 $i_1, \cdots, i_n$ 是求和指标. 排除$\boldsymbol{\Psi}$的有重复指标的（从而等于零的）分量项，记 $\sigma(k) = i_k$，$k = 1, \cdots, n$，并考虑到分量的反称性：

$$\Psi^{i_1\cdots i_n} = \Psi^{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} = \text{sgn}\sigma\Psi^{1\cdots n},$$

上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} \diamond \boldsymbol{\Psi} &= \sum_{\sigma} g_{1\sigma(1)}\cdots g_{n\sigma(n)}\Phi^{1\cdots n}\Psi^{\sigma(1)\cdots\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn}\sigma g_{1\sigma(1)}\cdots g_{n\sigma(n)}\Phi^{1\cdots n}\Psi^{1\cdots n} \\ &= \det[g_{ij}]\Phi^{1\cdots n}\Psi^{1\cdots n} = g\Phi^{1\cdots n}\Psi^{1\cdots n}. \quad (24)\end{aligned}$$

现在我们用广义 Kronecker 符号和 Ricci 符号给出行列式展开式的各种表达. 设有 $n \times n$ 矩阵 $[M_{ij}]$，按定义，并利用 (3) 和 $(19)_1$，它的行列式依次可表为

$$\begin{aligned}\det[M_{ij}] &= \begin{vmatrix} M_{11}\cdots M_{1n} \\ \vdots \\ M_{n1}\cdots M_{nn}\end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \text{sgn}\sigma M_{\sigma(1)1}\cdots M_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn}\sigma\delta^{i_1}_{\sigma(1)}\cdots\delta^{i_n}_{\sigma(n)}M_{i_1 1}\cdots M_{i_n n} \\ &= \delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}M_{i_1 1}\cdots M_{i_n n} = e^{i_1\cdots i_n}M_{i_1 1}\cdots M_{i_n n}. \quad (25)\end{aligned}$$

行列式两行或列交换就变号，即行列式关于行及列的指标是反称的。利用这性质，又有

$$\begin{aligned}\det[M_{ij}] &= \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \text{sgn}\tau\begin{vmatrix} M_{1\tau(1)}\cdots M_{1\tau(n)} \\ \vdots \\ M_{n\tau(1)}\cdots M_{n\tau(n)}\end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \text{sgn}\tau \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \text{sgn}\sigma M_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots M_{\sigma(n)\tau(n)}\end{aligned}$$

$$
= \frac{1}{n!} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}\tau \delta^{i_1}_{\tau(1)} \cdots \delta^{i_n}_{\tau(n)} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\sigma \delta^{j_1}_{\sigma(1)} \cdots
$$

$$
\delta^{j_n}_{\sigma(n)} M_{i_1 j_1} \cdots M_{i_n j_n}
$$

$$
= \frac{1}{n!} e^{i_1 \cdots i_n} e^{j_1 \cdots j_n} M_{i_1 j_1} \cdots M_{i_n j_n}. \tag{26}
$$

类似地有

$$
\det[M^{ij}] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\sigma M^{\sigma(1)1} \cdots M^{\sigma(n)n}
$$

$$
= e_{i_1 \cdots i_n} M^{i_1 1} \cdots M^{i_n n}
$$

$$
= \frac{1}{n!} e_{i_1 \cdots i_n} e_{j_1 \cdots j_n} M^{i_1 j_1} \cdots M^{i_n j_n}. \tag{27}
$$

$$
\det[M^i_j] = e_{i_1 \cdots i_n} M^{i_1}_1 \cdots M^{i_n}_n
$$

$$
= e^{i_1 \cdots i_n} M^1_{i_1} \cdots M^n_{i_n} \tag{28}
$$

$$
= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\tau \begin{vmatrix} M^1_{\tau(1)} \cdots M^1_{\tau(n)} \\ \vdots \\ M^n_{\tau(1)} \cdots M^n_{\tau(n)} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{n!} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}\tau e_{j_1 \cdots j_n} M^{j_1}_{\tau(1)} \cdots M^{j_n}_{\tau(n)}
$$

$$
= \frac{1}{n!} e_{j_1 \cdots j_n} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}\tau \delta^{i_1}_{\tau(1)} \cdots \delta^{i_n}_{\tau(n)} M^{j_1}_{i_1} \cdots M^{j_n}_{i_n}
$$

$$
= \frac{1}{n!} e_{j_1 \cdots j_n} e^{i_1 \cdots i_n} M^{j_1}_{i_1} \cdots M^{j_n}_{i_n}
$$

$$
= \frac{1}{n!} \delta^{i_1 \cdots i_n}_{j_1 \cdots j_n} M^{j_1}_{i_1} \cdots M^{j_n}_{i_n}. \tag{29}
$$

比较"行列式的值为零，如果有重复的行或列；两行或列交换使行列式的值变号"和 Ricci 符号的取值定理 9.6，(28) 式又可改写为

$$
e_{j_1 \cdots j_n} \det[M^i_j] = e_{i_1 \cdots i_n} M^{i_1}_{j_1} \cdots M^{i_n}_{j_n}, \tag{30}
$$

$$
e^{j_1 \cdots j_n} \det[M^i_j] = e^{i_1 \cdots i_n} M^{j_1}_{i_1} \cdots M^{j_n}_{i_n}. \tag{31}
$$

如果我们有 $r \times r$ 矩阵 ($r \leqslant n$)，其中 $(i_1, \cdots, i_r)$ 和 $(j_1, \cdots, i_r)$ 是固定的甚至可以重复的指标组，则

$$
\begin{vmatrix} M^{i_1}_{j_1} \cdots M^{i_1}_{j_r} \\ \vdots \\ M^{i_r}_{j_1} \cdots M^{i_r}_{j_r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \begin{vmatrix} M^{i_1}_{\tau(j_1)} \cdots M^{i_1}_{\tau(j_r)} \\ \vdots \\ M^{i_r}_{\tau(j_1)} \cdots M^{i_r}_{\tau(j_r)} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{r!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma M^{\sigma(i_1)}_{\tau(j_1)} \cdots M^{\sigma(i_r)}_{\tau(j_r)}
$$

$$
= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma \delta^{\sigma(i_1)}_{p_1} \cdots \delta^{\sigma(i_r)}_{p_r}
$$

$$
\cdot \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\tau \delta^{q_1}_{\tau(j_1)} \cdots \delta^{q_r}_{\tau(j_r)} M^{p_1}_{q_1} \cdots M^{p_r}_{q_r}
$$

$$
= \frac{1}{r!} \delta^{i_1\cdots i_r}_{p_1\cdots p_r} \delta^{q_1\cdots q_r}_{j_1\cdots j_r} M^{p_1}_{q_1} \cdots M^{p_r}_{q_r}. \tag{32}
$$

矩阵 $M=[M^i_j]$ 的伴随矩阵,记为 $\mathrm{adj}M$, 是各元素为M的代数余子式的矩阵的转置,它的第 j 行,第 i 列的元素的表达式是

$$
(\mathrm{adj}M)^j_i = \frac{\partial \det M}{\partial M^i_j}
$$

$$
= \frac{1}{n!} \delta^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_n} \left(\frac{\partial M^{i_1}_{j_1}}{\partial M^i_j} M^{i_2}_{j_2} \cdots M^{i_n}_{j_n} + \cdots \right.
$$

$$
\left. + M^{i_1}_{j_1} \cdots M^{i_{n-1}}_{j_{n-1}} \frac{\partial M^{i_n}_{j_n}}{\partial M^i_j} \right)
$$

$$
= \frac{1}{(n-1)!} \delta^{j j_2\cdots j_n}_{i i_2\cdots i_n} M^{i_2}_{j_2} \cdots M^{i_n}_{j_n}. \tag{33}
$$

构造一个矩阵,它的第 i 行,第 j 列的元素是

$$
(\mathrm{adj}M)^i_p M^p_j = \frac{1}{(n-1)!} \delta^{i i_2\cdots i_n}_{p j_2\cdots j_n} M^p_j M^{j_2}_{i_2} \cdots M^{j_n}_{i_n}
$$

$$
= \frac{1}{(n-1)!} e^{i i_2\cdots i_n} e_{p j_2\cdots j_n} M^p_j M^{j_2}_{i_2} \cdots M^{j_n}_{i_n}
$$

$$
= \frac{1}{(n-1)!} e^{i i_2\cdots i_n} e_{j i_2\cdots i_n} \det M
$$

$$
= \frac{1}{(n-1)!} \delta^{i i_2\cdots i_n}_{j i_2\cdots i_n} \det M = \delta^i_j \det M,
$$

这里用到了(30)和(10). 上式写成矩阵形式就是

$$(\mathrm{adj}M)M = I\det M, \tag{34}$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位阵。 当M为满秩 ($\det M\neq 0$)，存在逆阵 M^{-1}，由上式就得代数中熟知的求逆公式：

$$M^{-1}=\frac{1}{\det M}\mathrm{adj}M. \tag{35}$$

§10 定向，容积元和 Hodge 对偶性

我们可以对一根直线(1 维向量空间)进行定向，即赋予方向性：选定一个基向量 $\boldsymbol{g}$ 代表正方向。任何非零向量 $\boldsymbol{v}$ 可用 $\boldsymbol{g}$ 表为 $\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{g}$ ($\alpha\neq 0$)。按实数 α 的正负，全体非零向量分成两个等价类——$\mathscr{F}_+$ 和 $\mathscr{F}_-$：每个 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{F}_+$ 和 $\boldsymbol{g}$ 等价(在方向上)，即具有和 $\boldsymbol{g}$ 相同的(正)方向；反之，每个 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{F}_-$ 具有负方向。

我们用类似思想把定向概念推广至 n 维内积空间 $\mathscr{V}$。 任选一个非零 n-形式 $\boldsymbol{\Omega}\in\Lambda_n(\mathscr{V})$ 代表 $\mathscr{V}$ 的正方向。任何非零 n-形式 $\boldsymbol{\Omega}'$ 可用 $\boldsymbol{\Omega}$ 表为

$$\boldsymbol{\Omega}'=\alpha\boldsymbol{\Omega}(\alpha\neq 0). \tag{1}$$

按实数 α 的正负，全体非零 n-形式分成两个等价类，称为 $\mathscr{V}$ 的**定向**，仍记为 $\mathscr{F}_+$ 和 $\mathscr{F}_-$。每 $\boldsymbol{\Omega}'\in\mathscr{F}_+$ 称为**正 n-形式**，在方向上和 $\boldsymbol{\Omega}$ 等价，代表 $\mathscr{V}$ 的正方向；反之，每 $\boldsymbol{\Omega}'\in\mathscr{F}_-$ 称为**负 n-形式**。$\mathscr{V}$ 和正定向 $\mathscr{F}_+$ 合起来 $\{\mathscr{V},\mathscr{F}_+\}$ 称为**有定向的内积空间**。 今后只讨论有定向的空间，仍简记为 $\mathscr{V}$。

现讨论另一种等价的定向方式。 任意选定 $\mathscr{V}$ 的一组协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$，总可以这样调整各基向量的编号和长度，使得这些基向量的外积等于前面已选定的正 n-形式 $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n. \tag{2}$$

从 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 出发，给定一个非奇异的转换矩阵 $[A^i_{i'}]$，按公式

$$\boldsymbol{g}_{i'}=A^i_{i'}\boldsymbol{g}_i \tag{3}$$

就得另一组协变基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$。按 $\det[A^i_{i'}]$ 的正负，全体协变基分成两等价类，记为 $\mathscr{G}_+$ 和 $\mathscr{G}_-$。从

$$\Omega' = \boldsymbol{g}_{1'} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_{n'} = A^{i_1}_{1'} \cdots A^{i_n}_{n'} \boldsymbol{g}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_{i_n}$$
$$= \det[A^{i}_{i'}] \boldsymbol{g}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_n = \det[A^{i}_{i'}] \Omega \tag{4}$$
可见，任何 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\} \in \mathscr{G}_+$ 的基向量的外积 (n-形式) $\boldsymbol{g}_{1'} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_{n'} \in \mathscr{F}_+$，而对应于任何 $\Omega' \in \mathscr{F}_+$ 的 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$ 必属于 $\mathscr{G}_+$，因为这时由 (1) 和 (4) 我们有

$$\det[A^{i}_{i'}] = \alpha > 0. \tag{5}$$

$\mathscr{F}_-$ 和 $\mathscr{G}_-$ 也有相同的对应．因此协变基的等价类 $\mathscr{G}_+$ 和 $\mathscr{G}_-$ 同样有效地对 $\mathscr{V}$ 定向．$\{\boldsymbol{g}_i\} \in \mathscr{G}_+$ 称为**正基**(通常叫**右手系**)，属于 $\mathscr{G}_-$ 的则称为**负基**．

两种等效的定向方式的引进次序可以颠倒过来，即先选定一组协变基作为正基，然后引导到用 n-形式来定向．

$\{\boldsymbol{g}_i\}$ 通过 $\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j$ 唯一地确定一组逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$．由于 $\det[g^{ij}] > 0$，而

$$\boldsymbol{g}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}^n = \det[g^{ij}] \boldsymbol{g}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}_n = \det[g^{ij}] \Omega, \tag{6}$$

故 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 属同一等价类，同样有效地可用来定向．其实，在内积空间，协变和逆变基向量同是无本质区别的向量，因此可用任意 n 个线性无关的有序向量组来定向．

例如，一般取 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 作为三维欧氏空间的正定向，即通常所谓右手系．

10.1 定义 设 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的正标准正交基，n-形式 $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$ 称为 $\mathscr{V}$ 的**容积元**或 **Eddington 张量**．□

这个定义有意义，因为我们有

10.2 定理 容积元与所选取的(正)标准正交基无关．

证明 设有另一正标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_{i'}\}: \boldsymbol{e}_{i'} = A^{i}_{i'}\boldsymbol{e}_i$ ($\det[A^{i}_{i'}] = 1$)，则

$$\boldsymbol{e}_{1'} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{n'} = \det[A^{i}_{i'}] \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\epsilon}. \ \square \tag{7}$$

可见，容积元在正标准正交基里的唯一严格分量等于 1．利用 (8.39)，有

$$\boldsymbol{\epsilon} \diamond \boldsymbol{\epsilon} = \det[\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j] = \det[\delta_{ij}] = 1. \tag{8}$$

现设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 为任意正协变基．容积元作为正 n-形式和张量，可表

达为

$$\epsilon = \frac{1}{x} g_1 \wedge \cdots \wedge g_n = \epsilon^{i_1 \cdots i_n} g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_n},$$

$$(x > 0). \tag{9}$$

利用 (8) 及 (8.39)，得

$$1 = \epsilon \Diamond \epsilon = \frac{1}{x^2} (g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) \Diamond (g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)$$

$$= \frac{1}{x^2} \det[g_{ij}] = \frac{g}{x^2}. \tag{10}$$

于是

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{g}} g_1 \wedge \cdots \wedge g_n. \tag{11}$$

$$\epsilon^{i_1 \cdots i_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} g_1 \wedge \cdots \wedge g_n (g^{i_1}, \cdots, g^{i_n})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} g^{i_1} \wedge \cdots \wedge g^{i_n} (g_1, \cdots, g_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{i_1 \cdots i_n}. \tag{12}$$

又从 (8.26)，有

$$g_1 \wedge \cdots \wedge g_n = g g^1 \wedge \cdots \wedge g^n$$

即 $\frac{1}{\sqrt{g}} g_1 \wedge \cdots \wedge g_n = \sqrt{g}\, g^1 \wedge \cdots \wedge g^n,$

所以又有表达式

$$\epsilon = \sqrt{g}\, g^1 \wedge \cdots \wedge g^n = \epsilon_{i_1 \cdots i_n} g^{i_1} \otimes \cdots \otimes g^{i_n},$$

$$\epsilon_{i_1 \cdots i_n} = \sqrt{g}\, e_{i_1 \cdots i_n}. \tag{13}$$

从 (12) 和 $(13)_1$，我们有

$$\epsilon_{i_1 \cdots i_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n} = e_{i_1 \cdots i_n} e^{j_1 \cdots j_n}. \tag{14}$$

在三维情形，反称张量有三个独立分量，常用也有三个分量的向量来代替。这在讨论上有时会带来方便。现将这思想推广到一般的 n 维空间，考虑到

$$\dim \Lambda_r(\mathscr{V}) = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dim \Lambda_{n-r}(\mathscr{V}),$$

我们引进

10.3 定义　对偶映射

$$*: \Lambda_r(\mathscr{V}) \to \Lambda_{n-r}(\mathscr{V}): \boldsymbol{\Phi} \longmapsto *\boldsymbol{\Phi},\ 0 \leqslant r \leqslant n, \tag{15}$$

由下述条件定义

$$\boldsymbol{\epsilon} \Diamond (\boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi}) = (*\boldsymbol{\Phi}) \Diamond \boldsymbol{\Psi},\ \forall \boldsymbol{\Psi} \in \Lambda_{n-r}(\mathscr{V}). \tag{16}$$

“$*$”称为 **Hodge 星算子**,而 $*\boldsymbol{\Phi}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**对偶**. □

对偶映射的定义是恰当的，因有

10.4 定理　任意 $\boldsymbol{\Phi} \in \Lambda_r(\mathscr{V})$ 的对偶 $*\boldsymbol{\Phi} \in \Lambda_{n-r}(\mathscr{V})$ 存在唯一。如果记 $s = n - r$，则

$$*\boldsymbol{\Phi} = \frac{(-1)^{rs}}{r!} \boldsymbol{\epsilon}(r)\boldsymbol{\Phi}. \tag{17}$$

证明　设对任意给定的 $\boldsymbol{\Phi}$，除了 $*\boldsymbol{\Phi}$，还有 $\boldsymbol{\Theta} \in \Lambda_s(\mathscr{V})$ 也是满足 (16) 的对偶，即(利用 (8.22))

$$0 = (*\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}) \Diamond \boldsymbol{\Psi} = \sum_{i_1 < \cdots < i_s} (*\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta})_{i_1 \cdots i_s} \Psi^{i_1 \cdots i_s}.$$

由于 $\boldsymbol{\Psi}$ 为任意，可每次取只有一个严格分量不为零的 $\boldsymbol{\Psi}$，从而得 $*\boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Theta}$ 各严格分量均为零。唯一性得证。为了证 (17)，先求 (16) 中 n-形式 $\boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi}$ 的协变严格分量

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi})_{1 \cdots n} &= \boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n) \\
&= \frac{n!}{r!s!} \mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n) \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{g}_{\sigma(r)}) \\
&\quad \cdot \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_{\sigma(r+1)}, \cdots, \boldsymbol{g}_{\sigma(n)}) \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \Phi_{\sigma(1) \cdots \sigma(r)} \Psi_{\sigma(r+1) \cdots \sigma(n)},
\end{aligned}$$

从而得 (16) 式的左端

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} \Diamond (\boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi}) &= \epsilon^{1 \cdots n} (\boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi})_{1 \cdots n} \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \epsilon^{1 \cdots n} \Phi_{\sigma(1) \cdots \sigma(r)} \Psi_{\sigma(r+1) \cdots \sigma(n)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma}\epsilon^{\sigma(1)\cdots\sigma(n)}\Phi_{\sigma(1)\cdots\sigma(r)}\Psi_{\sigma(r+1)\cdots\sigma(n)}$$

$$= \frac{1}{r!s!}\epsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s}\Phi_{i_1\cdots i_r}\Psi_{j_1\cdots j_s} \text{（张量分量）}$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ j_1<\cdots<j_s}}\epsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s}\Phi_{i_1\cdots i_r}\Psi_{j_1\cdots j_s} \text{（严格分量）} \tag{18}$$

(16) 式的右端为

$$(*\Phi)\diamond\Psi = \sum_{j_1<\cdots<j_s}(*\Phi)^{j_1\cdots j_s}\Psi_{j_1\cdots j_s}. \tag{19}$$

(18), (19) 相等，考虑到 Ψ 的任意性，得

$$(*\Phi)^{j_1\cdots j_s} = \sum_{i_1<\cdots<i_r}\epsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s}\Phi_{i_1\cdots i_r} = \frac{1}{r!}\epsilon^{i_1\cdots i_r j_1\cdots j_s}\Phi_{i_1\cdots i_r}$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{r!}\epsilon^{j_1\cdots j_s i_1\cdots i_r}\Phi_{i_1\cdots i_r}. \tag{20}$$

此即 (17) 式的分量表达式.

10.5 定理 设 $s=n-r$, $0\leqslant r\leqslant n$,

$$**\Phi = (-1)^{rs}\Phi, \quad \forall\Phi\in\Lambda_r(\mathscr{V}). \tag{21}$$

证 将星算子作用于 (17)，考虑到 $*\Phi\in\Lambda_s(\mathscr{V})$，得

$$**\Phi = \frac{1}{r!s!}\epsilon\binom{s}{\cdot}\epsilon\binom{r}{\cdot}\Phi. \tag{22}$$

下面看此式的分量

$$(**\Phi)_{i_1\cdots i_r} = \frac{1}{r!s!}\epsilon_{i_1\cdots i_r p_1\cdots p_s}\epsilon^{p_1\cdots p_s j_1\cdots j_r}\Phi_{j_1\cdots j_r}$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{r!s!}\delta^{j_1\cdots j_r p_1\cdots p_s}_{i_1\cdots i_r p_1\cdots p_s}\Phi_{j_1\cdots j_r}$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{r!}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}\Phi_{j_1\cdots j_r}$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta^{j_1}_{\sigma(i_1)}\cdots\delta^{j_r}_{\sigma(i_r)}\Phi_{j_1\cdots j_r}$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma\,\Phi_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}$$

$$= (-1)^{rs}\Phi_{i_1\cdots i_r}. \quad \square$$

可见

$$* * = (-1)^{r(n-r)} id = \begin{cases} id, & n \text{ 为奇数或 } r \text{ 为偶数,} \\ -id, & n \text{ 为偶数和 } r \text{ 为奇数,} \end{cases} \tag{23}$$

其中 id 是恒同映射.

从(16)容易看出, Hodge 算子是线性算子. 在上面这些定理中, 当 $r=0$ 或 n 时, Φ 是标量 α 或可表为 $\alpha\epsilon$. 根据"*"的线性性质, 下述推论有意义.

10.6 推论

$$*1 = \epsilon, \quad *\epsilon = 1. \tag{24}$$

证明 当 $r=n$, 以 ϵ 作 Φ, 由(16)有

$$\epsilon \diamond (\epsilon \wedge 1) = (*\epsilon) \diamond 1, \text{ 即 } \epsilon \diamond \epsilon = (*\epsilon) \cdot 1. \tag{25}$$

利用(8), 上式给出 $(24)_2$. 求 $(24)_2$ 的对偶, 考虑到(23), 又得 $(24)_1$. 也可以直接用(17)式计算:

$$*1 = \epsilon\binom{0}{\cdot}1 = \epsilon, \quad *\epsilon = \frac{1}{n!}\epsilon \odot \epsilon = \epsilon \diamond \epsilon = 1. \quad \square$$

三维空间是特殊的, 下面讨论将局限于它.

10.7 定义 在 $\mathscr{V}^3$, 两向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的外积的 Hodge 对偶定义为该两向量的**叉积**

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} := *(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}). \tag{26}$$

10.8 定理 上面定义的叉积和经典定义一致, 即有性质:

(i) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ 是双线性向量值函数;

(ii) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$;

(iii) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$;

(iv) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\}$ 具有正定向;

(v) $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ 等于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 所张成的平行四边形的面积.

证明 $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ 是二阶反称张量, 其对偶是向量. 加上外积和 Hodge 算子的线性性质及外积的反称性, 性质(i)和(ii)是显然的. 根据定理 8.9, 显然, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ 当且仅当 $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ 线性相关. 这时(iii), (v)自然满足. $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{o}\}$ 没有定向问题. 因此只需对线性无关的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 证后三性质. 为此, 在(16), 令 $\Phi =$

$u\wedge v$，$\Psi = w$，得

$$\epsilon\Diamond((u\wedge v)\wedge w) = (*(u\wedge v))\Diamond w,$$

即

$$\epsilon\Diamond(u\wedge v\wedge w) = (u\times v)w,\ \forall w\in\mathscr{V}^3. \tag{27}$$

依次取 u 和 v 为 w，上式左端的外积有两元素相同而消失，所得的

$$(u\times v)u = 0,\ (u\times v)v = 0, \tag{28}$$

证实 (iii)。在 (27) 取 $u\times v$ 为 w，得

$$\epsilon\Diamond(u\wedge v\wedge(u\times v)) = (u\times v)(u\times v). \tag{29}$$

任何3-形式可用容积元线性表出。将

$$u\wedge v\wedge(u\times v) = \alpha\epsilon \tag{30}$$

代入 (29)，并考虑到 (10.8)，得

$$\alpha = (u\times v)(u\times v) = |u\times v|^2 > 0. \tag{31}$$

这说明 $\{u, v, u\times v\}$ 和 ϵ 有相同定向，即正定向。(iv) 得证。利用 (30) 消去 (29) 中的 ϵ，并将 (31) 代入，得

$$(u\wedge v\wedge(u\times v))\Diamond(u\wedge v\wedge(u\times v)) = |u\times v|^4.$$

利用 (8.39) 和 (28)，上式变为

$$\begin{vmatrix} uu & uv & 0 \\ vu & vv & 0 \\ 0 & 0 & |u\times v|^2 \end{vmatrix} = |u\times v|^4,$$

即

$$\begin{aligned} |u\times v|^2 &= |u|^2|v|^2 - (uv)^2 \\ &= |u|^2|v|^2(1-\cos^2\theta) = |u|^2|v|^2\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{32}$$

其中 θ 为 u 和 v 的夹角。(32) 证明了性质。

10.9 定理 记混合积为

$$[uvw] := (u\times v)w,\ \forall u, v, w\in\mathscr{V}^3, \tag{33}$$

则

$$*(u\wedge v\wedge w) = [uvw],\ *[uvw] = u\wedge v\wedge w. \tag{34}$$

证明 在 (16)，取 $\Phi = u\wedge v\wedge w$，得

$$\epsilon\Diamond(u\wedge v\wedge w) = (*(u\wedge v\wedge w))\Diamond 1$$

$$= *(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}). \tag{35}$$

将上式代入(27)，并考虑到(33)，得$(34)_1$. 取对偶又得$(34)_2$.

10.10 定理（Gram 行列式） 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathscr{V}^3$,则

$$[\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{uvw}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{au} & \boldsymbol{av} & \boldsymbol{aw}\\ \boldsymbol{bu} & \boldsymbol{bv} & \boldsymbol{bw}\\ \boldsymbol{cu} & \boldsymbol{cv} & \boldsymbol{cw}\end{vmatrix}. \quad \square \tag{36}$$

公式(8.39)可称为 n 维 Gram 行列式.

证明 只需计算

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{uvw}] &= [\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{uvw}]\boldsymbol{\epsilon}\Diamond\boldsymbol{\epsilon}\\ &=([\boldsymbol{abc}]\boldsymbol{\epsilon})\Diamond([\boldsymbol{uvw}]\boldsymbol{\epsilon})\\ &=(*[\boldsymbol{abc}])\Diamond(*[\boldsymbol{uvw}])\\ &=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})\Diamond(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

应用(8.39)于上式右端,即得(36).

10.11 定理（Laplace 恒等式） 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}^3$, 则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{au} & \boldsymbol{av}\\ \boldsymbol{bu} & \boldsymbol{bv}\end{vmatrix}. \tag{37}$$

证明 若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$或$\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$线性相关，(37)自然成立. 余下需证两向量组均为线性无关的情形. 为此,在(16),依次取 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}$ 为 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 及 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 得

$$\boldsymbol{\epsilon}\Diamond(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}), \tag{38}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}\Diamond(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{39}$$

将

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{\epsilon}, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\beta\boldsymbol{\epsilon} \tag{41}$$

分别代入(38)和(39)，并考虑(8)，得

$$\alpha=\beta=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}). \tag{42}$$

假设 $\alpha\neq 0$，用(40)消去(39)的 $\boldsymbol{\epsilon}$，我们有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}))\Diamond(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\\ &=((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}))^2.\end{aligned}$$

应用(8.39)于上式,并考虑到 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\perp\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$,

得

$$\begin{vmatrix} au & av & 0 \\ bu & bv & 0 \\ 0 & 0 & (a\times b)(u\times v) \end{vmatrix} = ((a\times b)(u\times v))^3.$$

$a=0$ 的情形可以看作 $a\neq 0$ 的结果的极限情形，因而 (37) 式仍然有效。□

10.12 定理 在 $\mathscr{V}^3$，Eddington 张量

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k \tag{43}$$

有分量表示式：

$$\epsilon_{ijk} = [\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k],\quad \epsilon^{ijk} = [\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]. \tag{44}$$

证明 我们利用公式 (11—13) 于 $\mathscr{V}^3$，有

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\boldsymbol{g}_1\wedge\boldsymbol{g}_2\wedge\boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^1\wedge\boldsymbol{g}^2\wedge\boldsymbol{g}^3, \tag{45}$$

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}\,e_{ijk},\qquad \epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk}. \tag{46}$$

取 (45) 的对偶，并考虑到 (8) 和 $(34)_1$，有

$$1 = \frac{1}{\sqrt{g}}[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3] = \sqrt{g}\,[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3],$$

从而

$$[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3] = \sqrt{g},\qquad [\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3] = \frac{1}{\sqrt{g}}. \tag{47}$$

根据外积和 Ricci 符号的性质，又有

$$\boldsymbol{g}_i\wedge\boldsymbol{g}_j\wedge\boldsymbol{g}_k = e_{ijk}\boldsymbol{g}_1\wedge\boldsymbol{g}_2\wedge\boldsymbol{g}_3,$$
$$\boldsymbol{g}^i\wedge\boldsymbol{g}^j\wedge\boldsymbol{g}^k = e^{ijk}\boldsymbol{g}^1\wedge\boldsymbol{g}^2\wedge\boldsymbol{g}^3.$$

取上两式的对偶，并将 (47) 代入，得

$$[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k] = \sqrt{g}\,e_{ijk},\qquad [\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k] = \frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk} \tag{48}$$

将 (48) 代入 (46)，即得 (44)。 □

细心的读者注意到，在经典的张量文献里，公式 (44) 是作为定义而先验地给出的。

对任何向量 $\boldsymbol{w}$，有

$$\boldsymbol{w}=w^k\boldsymbol{g}_k=(\boldsymbol{w}\boldsymbol{g}^k)\boldsymbol{g}_k=w_k\boldsymbol{g}^k=(\boldsymbol{w}\boldsymbol{g}_k)\boldsymbol{g}^k. \tag{49}$$

利用(49)式，可得任何两向量叉乘的分量表达式：

$$\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j=[(\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j)\boldsymbol{g}^k]\boldsymbol{g}_k=\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k, \tag{50}$$

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k]\boldsymbol{g}^k=\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}&=[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{g}^k]\boldsymbol{g}_k=u_iv_j[\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]\boldsymbol{g}_k\\&=u_iv_j\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k,\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}&=[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\boldsymbol{g}_k]\boldsymbol{g}^k=u^iv^j[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k]\boldsymbol{g}^k\\&=u^iv^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k.\end{aligned} \tag{53}$$

第III章　仿　射　量

§1　二阶张量和线性变换

二阶张量又称**仿射量**．仿射量 $\boldsymbol{T}$ 在右边点乘向量 $\boldsymbol{v}$，给出另一个向量 $\boldsymbol{Tv}$．由于点乘的线性性质：

$$\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{Tu}+\beta\boldsymbol{Tv},\quad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V};\ \alpha,\beta\in\mathrm{R},\tag{1}$$

在右点乘意义下，每个仿射量 $\boldsymbol{T}$ 定义一个从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{V}$ 的线性变换

$$\boldsymbol{v}\longmapsto\boldsymbol{w}:=\boldsymbol{Tv}.\tag{2}$$

上式的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 分别称为在这个变换(映射)下的**原象**和**象**．

同理，在左点乘意义下，仿射量 $\boldsymbol{T}$ 也定义一个线性变换

$$\boldsymbol{v}\longmapsto\boldsymbol{vT}.\tag{3}$$

一般来说，变换 (2) 和 (3) 是不同的：$\boldsymbol{vT}\neq\boldsymbol{Tv}$，考虑到[1]

$$\boldsymbol{vT}=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{v},\tag{4}$$

$\boldsymbol{T}$ 在左点乘意义下定义的映射可由其转置 $\boldsymbol{T}^*$ 在右点乘意义下实现．因此，左点乘并不扩大仿射量定义线性变换的范围．即使局限于右点乘，讨论仿射量和线性变换的关系并不失去一般性．但在某些情况下，区分两种意义的点乘却又是必要的．今后我们常把 $\boldsymbol{Tv}$ 说成"$\boldsymbol{T}$(右)作用于 $\boldsymbol{v}$"．由于 $\boldsymbol{T}$ 可作用于任何向量，$\boldsymbol{T}$ 所实现的线性变换的定义域是整个向量空间 $\mathscr{V}$．

1.1 定理[2]　任何仿射量 $\boldsymbol{T}$ 在右 (或左) 点乘意义下定义一个线性变换(这是上面已得到的结论)；任何线性变换 $\mathscr{L}:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ 由唯一的仿射量 $\boldsymbol{T}$ (或其转置 $\boldsymbol{T}^*$) 在右(或左)点乘意义下实现．

证明　只需证后半部分．对任意向量 $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i$，根据线性性

---

1) 因为根据点乘定义我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{vT}(\boldsymbol{u})&=\mathrm{C}_{(1,2)}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{T})(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{u})\\&=\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g}^i)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}_i)=\boldsymbol{T}^*\otimes\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}_i)\\&=\mathrm{C}_{(2,3)}(\boldsymbol{T}^*\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}),\quad\forall\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}.\end{aligned}$$

2) 第 IV 章的定理 7.10 给出本定理推广形式的更一般而简捷证明．

质，有

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v})=v^i\mathscr{L}(\boldsymbol{g}_i) \tag{5}$$

将 $\{\mathscr{L}(\boldsymbol{g}_i)\}$ 在 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 上分解

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{g}_i)=T^j{}_i\boldsymbol{g}_j, \tag{6}$$

并代入 (5)，得 (用到 (II.5.10))

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{v})&=T^j{}_iv^i\boldsymbol{g}_j=T^j{}_iv^k\delta^i_k\boldsymbol{g}_j=T^j{}_iv^k(\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k)\boldsymbol{g}_j\\&=(T^j{}_i\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^i)(v^k\boldsymbol{g}_k).\end{aligned} \tag{7}$$

从 (6) 看到，变换 $\mathscr{L}$ 在基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 下唯一确定 $[T^j{}_i]$. 容易验证，当基变换时，$T^j{}_i$ 按二阶张量混合分量的方式转换. 就是说，$T^j{}_i$ 是 $\mathscr{L}$ 唯一确定的某仿射量的分量. 记这个仿射量为 $\boldsymbol{T}=T^j{}_i\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^i$，就有

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}. \tag{8}$$

将 (7) 式改写，又得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{v})&=T^j{}_iv^k(\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^i)\boldsymbol{g}_j=(v^k\boldsymbol{g}_k)(T^j{}_i\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j)\\&=\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}^*.\quad\Box\end{aligned} \tag{9}$$

从下图

$$\boldsymbol{T}\begin{cases}\nearrow \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}=\mathscr{L}_1(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}^*\nwarrow\\ \searrow \boldsymbol{v}\boldsymbol{T}=\mathscr{L}_2(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{v}\swarrow\end{cases}\boldsymbol{T}^* \tag{10}$$

可以看出仿射量和线性变换的密切而错综复杂的关系：一个仿射量在左、右作用下分别定义两个线性变换；一个线性变换可分别由一个仿射量或其转置在右、左点乘意义下实现.

1.2 定理 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的基. 给定向量组 $\{\boldsymbol{f}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的 1-1 对应关系唯一地确定一个线性变换 $\mathscr{L}$. 在 $\mathscr{L}$ 下，$\boldsymbol{f}_i$ 是 $\boldsymbol{g}_i$ 的象. 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 及其转置 $\boldsymbol{T}^*$

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}_i\otimes\boldsymbol{g}^i,\ \boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{f}_i \tag{11}$$

分别在右、左点乘意义下实现 $\mathscr{L}$.

证明 考察由下述公式唯一确定的变换

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v})=\mathscr{L}(v^i\boldsymbol{g}_i):=v^i\boldsymbol{f}_i,\ \forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}. \tag{12}$$

这是一个线性变换. 因为，利用 (12)，$\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$；$\alpha,\beta\in\mathrm{R}$，我们有

$$\mathscr{L}(\alpha u+\beta v)=\mathscr{L}((\alpha u^i+\beta v^i)g_i)=(\alpha u^i+\beta v^i)f_i$$
$$=\alpha\mathscr{L}(u^ig_i)+\beta\mathscr{L}(v^ig_i)$$
$$=\alpha\mathscr{L}(u)+\beta\mathscr{L}(v).$$

显然，

$$\mathscr{L}(g_i)=\mathscr{L}(1g_i)=1f_i=f_i. \tag{13}$$

定理最后结论的根据是

$$\mathscr{L}(v)=v^if_i=(g^iv)f_i=(f_i\otimes g^i)v=Tv$$
$$=(vg^i)f_i=v(g^i\otimes f_i)=vT^*. \tag{14}$$

将 $\{f_i\}$ 在基 $\{g_i\}$ 上分解，又得 T 和 T^* 的分量表示式. □

仿射量和线性变换的关系使我们可以把张量代数的许多概念直接移植到线性变换上来：例如，线性变换的加法和数乘分别由仿射量的加法和数乘实现. 但线性变换的概念又导出仿射量的一系列新的性质. 为今后用，将第 II 章定理 5.5（算值定理）用于仿射量 T，我们有，$\forall u, v\in\mathscr{V}$，

$$T(u,v)=\mathrm{C}(T\otimes u\otimes v)=\mathrm{C}_{(1,2)(3,4)}(u\otimes T\otimes v)=uTv \tag{15}$$
$$=\mathrm{C}_{(1,2)}(u\otimes\mathrm{C}_{(2,3)}(T\otimes v))=u(Tv) \tag{16}$$
$$=\mathrm{C}_{(1,2)}(\mathrm{C}_{(1,2)}(u\otimes T)\otimes v)=(uT)v. \tag{17}$$

这里可以看到实质上是一回事，而又有多种含义的符号 T. (15) 式的左端是仿射量 T 在 u, v 上的值，右端是仿射量 T 同时左、右点乘以 u 和 v，而 (16) 和 (17) 式的右端，T 分别在右和左点乘意义下实现线性变换.

1.3 定理 对任何仿射量 T 实现的线性变换，零原象的象为零.

证明

$$To=T(0u)=0(Tu)=o, \tag{18}$$
$$oT=(0u)T=0(uT)=o. \tag{19}$$

1.4 定理 度量张量（**单位仿射量**）和零仿射量实现恒同变换和零变换：

$$\left.\begin{aligned}Iv=v,\quad vI=v\\ Ov=o,\quad vO=o\end{aligned}\right\}\forall v\in\mathscr{V}. \tag{20}$$

证明 利用(15—17)，$\forall \boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$，分别有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = u^i v^j \boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}_i,\ \boldsymbol{g}_j) = g_{ij}u^i v^j = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v},\\
&(\boldsymbol{v}\boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{u},\\
&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{O}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = 0 = \boldsymbol{u}\boldsymbol{o},\\
&(\boldsymbol{v}\boldsymbol{O})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}) = 0 = \boldsymbol{o}\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性及内积的正定性,即得(20).

1.5 定理 若 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_r\}$ 是线性相关向量集，则在任何仿射量 $\boldsymbol{T}$ 下,象集 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_r\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{T},\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_r\boldsymbol{T}\}$ 亦为线性相关集.

证明 因 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\ \boldsymbol{v}_r$ 线性相关,存在不全为零的系数 $\mu^1,\cdots,\ \mu^r$,使得

$$\sum_{i=1}^{r}\mu^i\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o}.$$

将 $\boldsymbol{T}$ 右和左作用于上述零向量,根据定理 1.3 和线性性质,得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{o} &= \boldsymbol{T}\left(\sum_{i=1}^{r}\mu^i\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\mu^i(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_i)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{r}\mu^i\boldsymbol{v}_i\right)\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{r}\mu^i(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{T}).\quad\square
\end{aligned}$$

这定理的逆未必成立.

§2 仿射量的积和转置

2.1 定义 两个仿射量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的点乘

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{S} := \mathrm{C}_{(2,3)}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}) \tag{1}$$

称为 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的积. □

$\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}$ 本身仍是一个仿射量,又可和其他仿射量,譬如 $\boldsymbol{U}$,点乘,得 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S})$.

2.2 定理 设 $\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{T},\ \boldsymbol{U}$ 是仿射量. 仿射量的积满足结合律

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{T})\boldsymbol{S}, \tag{2}$$

因而可笼统地写 $\boldsymbol{UTS}$.

证明 按点积的定义

$$U(TS)=\mathrm{C}_{(2,3)}(U\otimes \mathrm{C}_{(2,3)}(T\otimes S))=\mathrm{C}_{(2,3)(1,5)}(U\otimes T\otimes S)$$
$$=\mathrm{C}_{(2,3)}(\mathrm{C}_{(2,3)}(U\otimes T)\otimes S)=(UT)S. \quad \square$$

进一步，我们可以有任意 r 个仿射量的点积 $T_rT_{r-1}\cdots T_2T_1$，结果仍然是仿射量. 仿射量 T 的自点积写成

$$T^r:=\underbrace{T\cdots T}_{r\text{个}}. \tag{3}$$

积仿射量 TS 既然仍是仿射量，就可实现线性变换 $v\longmapsto(TS)v$，称为**积变换**. 由于 $(TS)v=T(Sv)$，可以认为，积变换是 S 和 T 单独实现的线性变换的复合:

$$v\longmapsto Sv\longmapsto T(Sv).$$

一般来说，$ST\neq TS$，因而实现不同的线性变换.

2.3 引理 设 T 是仿射量，若

$$\forall u,\ v\in\mathscr{V}: uTv=0, \tag{4}$$

则 T 是零仿射量.

证明 只要利用 (1.15) 将 (4) 写成

$$\forall u,\ v\in\mathscr{V}:\ T(u,\ v)=0,$$

就得引理的结论.

2.4 定理 设 T 是仿射量，恒有

$$vTu=uT^*v,\ \forall u,\ v\in\mathscr{V}. \tag{5}$$

证明 将 (1.15) 应用于转置仿射量的定义 (II.7.1, 9)

$$T^*(u,\ v)=T(v,\ u),\ \forall u,\ v\in\mathscr{V},$$

就得 (5).

2.5 定理 转置仿射量有下列性质:

(i) $(S+T)^*=S^*+T^*$, (6)

(ii) $(ST)^*=T^*S^*$, (7)

(iii) $(\alpha T)^*=\alpha T^*$, (8)

(iv) $O^*=O$, (9)

(v) $I^*=I$, (10)

(vi) $(\boldsymbol{T}^*)^* = \boldsymbol{T}$. (11)

证明 $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$，对各性质，不断引用 (5)，可得

(i) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{S}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}$

$= \boldsymbol{u}\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{S}^* + \boldsymbol{T}^*)\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u}[(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})^* - (\boldsymbol{S}^*+\boldsymbol{T}^*)]\boldsymbol{v} = 0. \tag{12}$$

(ii) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{v}$

$= (\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{v})\boldsymbol{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*)\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u}[(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T})^* - \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{S}^*]\boldsymbol{v} = 0. \tag{13}$$

(iii) $\boldsymbol{u}(\alpha\boldsymbol{T})^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\alpha\boldsymbol{T})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}(\alpha(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})) = \alpha(\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})$

$= \alpha\boldsymbol{u}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(\alpha\boldsymbol{T}^*)\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u}[(\alpha\boldsymbol{T})^* - \alpha\boldsymbol{T}^*]\boldsymbol{v} = 0. \tag{14}$$

(iv) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{O}^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{O}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{O}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{O}\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{O}^* - \boldsymbol{O})\boldsymbol{v} = 0. \tag{15}$$

(v) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{I}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{I}^* - \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = 0. \tag{16}$$

(vi) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{T}^*)^*\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{u}[(\boldsymbol{T}^*)^* - \boldsymbol{T}]\boldsymbol{v} = 0. \tag{17}$$

对 (12—17) 各式，应用引理 2.3，即得定理各结论。

§3 仿射量的行列式

3.1 定理 对任意仿射量 $\boldsymbol{T}$，恒有

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n)\\(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{T})\end{array}\right\} = (\det\boldsymbol{T})\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n, \quad \forall \boldsymbol{u}_i \in \mathscr{V}, \tag{1}$$

其中 $\det \boldsymbol{T} \in \mathrm{R}$ 仅依赖于 $\boldsymbol{T}$，称为 $\boldsymbol{T}$ 的**行列式**. $\det \boldsymbol{T}$ 有表达式：

$$\det \boldsymbol{T} = \frac{[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n)]\diamondsuit(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)\diamondsuit(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)} \tag{2}$$

$$= \frac{[(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{T})]\diamondsuit(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)\diamondsuit(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)}, \tag{3}$$

其中 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 为任意线性无关组.

证明 若$\{\boldsymbol{u}_i\}$线性相关，则根据定理 1.5，$\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i\}$和$\{\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{T}\}$亦线性相关. 根据第 II 章定理 8.9，$\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n$，$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n)$ 和 $(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{T})$ 均为零 n-形式，(1)式自然成立. 对于$\{\boldsymbol{u}_i\}$是线性无关的情形，$\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n$ 是非零 n-形式，任何 n-形式可由它线性表出. 特别地，有

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n)=\alpha\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n, \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{T})=\beta\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n. \tag{5}$$

用线性无关集$\{\boldsymbol{v}_i\}$的外积分别外全点乘(4)和(5)左、右两端，并考虑到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)\Diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)&=\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]=\det[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_j]\\&=(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)\Diamond(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)\neq 0^{1)},\end{aligned} \tag{6}$$

得

$$\alpha=[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n)]\Diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)/\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j], \tag{7}$$

$$\beta=[(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{T})]\Diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)/\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]. \tag{8}$$

下面将证明表达式(7, 8)与$\{\boldsymbol{u}_i\}$和$\{\boldsymbol{v}_i\}$的选择无关. 于是，由

$$\begin{aligned}&\frac{[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n)]\Diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]}\\&=\frac{\det[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]}=\frac{\det[(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{T})\boldsymbol{u}_j]}{\det[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_j]}\\&=\frac{[(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{T})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{T})]\Diamond(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)}{\det[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_j]},\end{aligned}$$

我们就有

$$\alpha=\beta. \tag{9}$$

今另取线性无关组$\{\boldsymbol{u}_{i'}\}$和$\{\boldsymbol{v}_{i'}\}$. 将$\{\boldsymbol{u}_i\}$和$\{\boldsymbol{v}_i\}$分别用$\{\boldsymbol{u}_{i'}\}$

---

1) 考虑未知量为 x^j 的线性方程组

$$\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_jx^j=0 \quad 即 \quad \boldsymbol{u}_i(x^j\boldsymbol{v}_j)=0. \tag{1)'}$$

任何 $\boldsymbol{w}\in\mathscr{V}$ 可表为 $\boldsymbol{w}=w^i\boldsymbol{u}_i$. 将 w^i 乘$(1)_i'$并求和，得

$$\boldsymbol{w}(x^j\boldsymbol{v}_j)=0. \tag{2)'}$$

这表示向量 $x^j\boldsymbol{v}_j$ 与 $\mathscr{V}$ 的每一向量正交，因而，根据第 II 章定理 2.3，

$$x^j\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{o}. \tag{3)'}$$

因$\{\boldsymbol{v}_j\}$线性无关，(3)′导致 $x^j=0$，即$(1)_i'$只有平凡解，从而 $\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]\neq 0$.

和 $\{\boldsymbol{v}_{i'}\}$ 的表示式

$$\boldsymbol{u}_i = A_i^{i'}\boldsymbol{u}_{i'} \quad (\det[A_i^{i'}] \neq 0), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{v}_i = B_i^{i'}\boldsymbol{v}_{i'} \quad (\det[B_i^{i'}] \neq 0) \tag{11}$$

代入(7)，考虑到 $\boldsymbol{T}$ 和外积的线性性质，有

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\det[A_i^{i'}B_j^{j'}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i'})\boldsymbol{v}_{j'}]}{\det[A_i^{i'}B_j^{j'}\boldsymbol{u}_{i'}\boldsymbol{v}_{j'}]} \\ &= \frac{\det[A_i^{i'}]\det[B_j^{j'}]\det[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{k'})\boldsymbol{v}_{l'}]}{\det[A_i^{i'}]\det[B_j^{j'}]\det[\boldsymbol{u}_{k'}\boldsymbol{v}_{l'}]} \\ &= \frac{\det[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i'})\boldsymbol{v}_{j'}]}{\det[\boldsymbol{u}_{i'}\boldsymbol{v}_{j'}]}.\end{aligned} \tag{12}$$

类似地可证 $\beta(=\alpha)$ 与 $\{\boldsymbol{u}_i\}$, $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的选择无关，记之为 $\det\boldsymbol{T}$. 从而(1), (2) 和 (3) 得证.

3.2 定理 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的行列式可用 $\boldsymbol{T}$ 的混合分量表示：

$$\det\boldsymbol{T} = \det[T^i{}_j] = \det[T_i{}^j]. \tag{13}$$

证明 在(2)，取 $\{\boldsymbol{u}_i\} = \{\boldsymbol{g}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\} = \{\boldsymbol{g}^i\}$，考虑到 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}_i = T^i{}_j\boldsymbol{g}_i$ 和

$$(\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n)\Diamond(\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n) = \delta_{1\cdots n}^{1\cdots n} = 1,$$

得

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{T} &= \det[T^k{}_j\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^i] = \det[T^k{}_j\delta_k^i] = \det[T^i{}_j] \\ &= \det[g^{ip}T_p{}^q g_{qj}] = \det[g^{kl}]\det[g_{pq}]\det[T_i{}^j] \\ &= \det[T_i{}^j]. \quad \square\end{aligned}$$

$\det\boldsymbol{T}$ 与基无关，从而基分量表达式(13)亦与基无关. 直接从基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的转换，亦易验证

$$\det[T^{i'}{}_{j'}] = \det[T^i{}_j]. \tag{14}$$

应注意的是

$$\det[T_{ij}] = \det[g_{kl}]\det[T^i{}_j] = g\det\boldsymbol{T}, \tag{15}$$

$$\det[T^{ij}] = \det[g^{kl}]\det[T_i{}^j] = g^{-1}\det\boldsymbol{T}. \tag{16}$$

3.3 定理 仿射量行列式有下列性质：

(i) $\det(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = (\det\boldsymbol{T})(\det\boldsymbol{S})$, (17)

(ii) $\det(\alpha\boldsymbol{T}) = \alpha^n\det\boldsymbol{T}$, $\forall\alpha\in\mathrm{R}$, (18)

$$\det \boldsymbol{O} = 0, \quad \det \boldsymbol{I} = 1, \tag{19}$$

(iii) $\det \boldsymbol{T}^* = \det \boldsymbol{T}.$ (20)

证明

(i) 应用(1)式,有

$$(\det(\boldsymbol{TS}))\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{TSu}_1) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{TSu}_n)$$

$$= (\det\boldsymbol{T})(\boldsymbol{Su}_1) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{Su}_n)$$

$$= (\det\boldsymbol{T})(\det\boldsymbol{S})\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n.$$

由 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 的任意性,上式给出(17)。

(ii) 应用(2),分别有

$$\det(\alpha\boldsymbol{T}) = \frac{\det[(\alpha\boldsymbol{Tu}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = \frac{\alpha^n\det[(\boldsymbol{Tu}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = \alpha^n \det\boldsymbol{T},$$

$$\det \boldsymbol{O} = \frac{\det[(\boldsymbol{Ou}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = \frac{\det[\boldsymbol{O}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j)]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = 0,$$

$$\det\boldsymbol{I} = \frac{\det[(\boldsymbol{Iu}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = \frac{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = 1.$$

(iii) 亦应用(2),得

$$\det\boldsymbol{T}^* = \frac{\det[(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]} = \frac{\det[(\boldsymbol{Tv}_i)\boldsymbol{u}_j]}{\det[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{u}_j]} = \det\boldsymbol{T}. \quad \square$$

推广公式(17),可得 r 个仿射量乘积 $\boldsymbol{T}_1\cdots\boldsymbol{T}_r$ 的行列式

$$\det(\boldsymbol{T}_1\cdots\boldsymbol{T}_r) = \prod_{i=1}^{r} \det \boldsymbol{T}_i. \tag{21}$$

§4 正则和退化

4.1 定义 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 称为**正则的**,如果 $\det \boldsymbol{T} \neq 0$,否则称为**退化的**。 □

根据定理 3.3,可得

4.2 推论 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}^*$ 同时正则或退化。 □

应用定理 3.1 的(1)式,可证

4.3 定理 $\boldsymbol{T}$ 是正则仿射量的充要条件是 $\boldsymbol{T}$ 将每一个线性无

关组 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 映射为线性无关组 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{T}\}$。

4.4 定理 对于正则仿射量 $\boldsymbol{T}$，每一个 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 无线性无关集 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$ 的象集 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_r\}$ 和 $\{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T},\cdots,\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{T}\}$ 亦线性无关。特别地，当 $r=1$，

$$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}, & (1)\\ \boldsymbol{u}\boldsymbol{T}\neq\boldsymbol{o}. \quad\square & (2)\end{cases}$$

这里用到约定：一个非零向量构成的向量组是线性无关组，而 $\{\boldsymbol{o}\}$ 则为线性相关组。

证明 因$\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$线性无关，可选 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{u}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_n$，使得 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 是线性无关组。又 $\boldsymbol{T}$ 是正则仿射量，根据定理 4.3，$\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{T}\}$ 均为线性无关组。作为这两个线性无关集的子集 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_r\}$ 和 $\{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T},\cdots,\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{T}\}$ 自然也都是线性无关集。

4.5 推论 $\boldsymbol{T}$ 是退化仿射量的充要条件是"$\exists\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}:\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$"或"$\exists\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}:\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{o}$"；$\boldsymbol{T}$ 是正则仿射量的充要条件是"$\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}\Rightarrow\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$"或"$\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{o}\Rightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$"。

4.6 定理 正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 实现**单射变换**：

$$\boldsymbol{u}_1\neq\boldsymbol{u}_2\Rightarrow\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1\neq\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_2 \text{ 和 } \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{T}\neq\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{T}. \tag{3}$$

证明 只要令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$，并利用(1)和(2)。

4.7 定理 正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 实现**满射变换**：

$$\forall\boldsymbol{w}\in\mathscr{V},\ \exists\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}:\boldsymbol{w}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}.$$

证明 将 $\boldsymbol{w}$ 用线性无关组 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{T}\}$ 表出，根据 $\boldsymbol{T}$ 的线性性质，得

$$\boldsymbol{w}=u^i(\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}_i)=\boldsymbol{T}(u^i\boldsymbol{g}_i)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{w}=v^i(\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{T})=(v^i\boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{T}.\quad\square$$

从以上两定理，得

4.8 推论 在右和左点乘意义下，正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 实现从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{V}$ 的双射变换 $\mathscr{L}_1:\boldsymbol{u}\longmapsto\boldsymbol{w}$ 和 $\mathscr{L}_2:\boldsymbol{v}\longmapsto\boldsymbol{w}$，从而分别存在唯一的逆变换 $\mathscr{L}_1^{-1}:\boldsymbol{w}\longmapsto\boldsymbol{u}$，满足 $\boldsymbol{w}=\mathscr{L}_1(\boldsymbol{u})$，和 $\mathscr{L}_2^{-1}:\boldsymbol{w}\longmapsto\boldsymbol{v}$，满足 $\boldsymbol{w}=\mathscr{L}_2(\boldsymbol{v})$。

4.9 定理 推论 4.8 的 $\mathscr{L}_1^{-1}$ 和 $\mathscr{L}_2^{-1}$ 是线性变换. 由唯一的仿射量 $\boldsymbol{T}^{-1}$, 称为 $\boldsymbol{T}$ 的逆仿射量,分别在右和左点乘意义下实现. $\boldsymbol{T}^{-1}$ 也是正则仿射量, 并且满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I}. \tag{4}$$

证明 设 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w}_2$, 则

$$\mathscr{L}_1^{-1}(\boldsymbol{w}_1) = \boldsymbol{u}_1, \quad \mathscr{L}_1^{-1}(\boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{u}_2. \tag{5}$$

点乘的线性性质使 $\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2) = \alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2$, 从而有

$$\mathscr{L}_1^{-1}(\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2) = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2.$$

将 (5) 代入上式右端, 即得逆变换 $\mathscr{L}_1^{-1}$ 的线性性质. 今证在右点乘意义下实现 $\mathscr{L}_1^{-1}$ 的唯一仿射量 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 是正则的. 只要证: $\{\boldsymbol{w}_i\}$ 线性无关 $\Rightarrow \{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w}_i\}$ 线性无关. 若记 $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w}_i$, 则 $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i$, 从而等价地要证: $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i\}$ 线性无关 $\Rightarrow \{\boldsymbol{u}_i\}$ 线性无关. 利用 $(3.1)_1$ 式,并考虑到 $\det\boldsymbol{T} \neq 0$, 就得 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 同时线性无关,从而 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 也是正则的. 设

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}, \tag{6}$$

则

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}. \tag{7}$$

将 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 右作用于 (6) 式, 有 $\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w}$, 和 (7) 比较,得 $(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. 由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性, 有 $(4)_1$. 类似地,将 $\boldsymbol{T}$ 右作用于 (7) 又可得 $(4)_2$. 用同样办法,可证 $\mathscr{L}_2^{-1}$ 的线性性质. 设仿射量 $\boldsymbol{S}$ 在左点乘意义下实现 $\mathscr{L}_2^{-1}$:

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{S}. \tag{8}$$

将第一式代入第二式, 得

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{o}. \tag{9}$$

由 $\boldsymbol{v}$ 的任意性和 $(1.20)_2$, 得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}. \tag{10}$$

和 $(4)_2$ 比较,根据逆仿射量的唯一性,得 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}^{-1}$.

4.10 定理 正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的逆 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 还有性质:

(i) $(\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{T}$, (11)

(ii) $(\boldsymbol{T}^*)^{-1} = (\boldsymbol{T}^{-1})^*$ (就可笼统地写 $\boldsymbol{T}^{-*}$), (12)

(iii) 若还有正则仿射量 $\boldsymbol{S}$，则 $\boldsymbol{TS}$ 亦正则，且

$$(\boldsymbol{TS})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}, \tag{13}$$

(iv) $\det \boldsymbol{T}^{-1} = (\det \boldsymbol{T})^{-1}$. $\quad (14)$

证明

(i) 利用 (7) 式，正则仿射量 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 亦有逆 $(\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}$，满足 $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\boldsymbol{u}$. 和 (6) 比较，得 $[(\boldsymbol{T}^{-1})^{-1} - \boldsymbol{T}]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$. 由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性，得 (11).

(ii) 只要将 (2.7) 和 (2.10) 应用于 $(4)_1$，得

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{T}^{-1})^* = \boldsymbol{I}. \tag{15}$$

根据推论 4.2，$\boldsymbol{T}^*$ 为正则，有唯一的逆 $(\boldsymbol{T}^*)^{-1}$.

根据 $(4)_2$，由 (15) 就得 (12).

(iii) 根据 (3.17)，得仿射量 $\boldsymbol{TS}$ 的正则性，从而存在 $(\boldsymbol{TS})^{-1}$. 设 $\boldsymbol{Su} = \boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{Tv} = \boldsymbol{w}$，则

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w},\ (\boldsymbol{TS})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}. \tag{16}$$

将 $(16)_2$ 代入 $(16)_1$，得

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}^{-1})\boldsymbol{w}.$$

另一方面，将 $(\boldsymbol{TS})^{-1}$ 右作用于 $(16)_3$，并用 (4)，得

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{TS})^{-1}\boldsymbol{w}.$$

比较上两式，利用 $\boldsymbol{w}$ 的任意性，就得 (13).

(iv) 应用 (3.17) 于 (4)，并考虑到 $(3.19)_2$，即得 (14).

§5 主不变量和矩

5.1 定义 设有映射（不一定线性）

$$\mathscr{I}: \mathscr{T}_2(\mathscr{V}) \to \mathrm{R}: \boldsymbol{T} \longmapsto \mathscr{I}(\boldsymbol{T}). \tag{1}$$

$\mathscr{I}(\boldsymbol{T})$ 称为 $\boldsymbol{T}$ 的不变量. □

一个仿射量可以有许多不变量. 下面我们给出两种最重要的不变量. (3.1) 对任何仿射量成立. 给定仿射量 $\boldsymbol{T}$，(3.1) 对 $\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}(\forall\lambda \in \mathrm{R})$ 也成立：

$$((\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_1) \wedge \cdots \wedge ((\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_n)$$

$$= \det(\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I}) \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n,$$

$$\forall \text{线性无关组} \{\boldsymbol{u}_i\}. \tag{2}$$

利用仿射量的加法和数乘的定义,外积的线性性质及 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 的线性无关，上式可展开为

$$[(-\lambda)^n + I_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + I_{n-1}(-\lambda) + I_n - \det(\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I})] \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{O}, \tag{3}$$

其中各系数 $I_1, \cdots, I_n$ 由下列各式定义:

$$I_1 \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_{i-1} \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i) \wedge \boldsymbol{u}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n, \tag{4}$$

$$I_2 \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_j) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n, \tag{5}$$

$\cdots$

$$I_r \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i_r}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n, \tag{6}$$

$\cdots$

$$I_{n-1} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_i \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n), \tag{7}$$

$$I_n \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_1) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_n). \tag{8}$$

可以看出,

$$I_n(\boldsymbol{T}) = \det \boldsymbol{T}. \tag{9}$$

5.2 定理 由(6)所定义的 $I_r (r = 1, \cdots, n)$, 是仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的 n 个不变量,称为**主不变量**，具有表达式

$$I_r(\boldsymbol{T}) = \frac{\left[\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i_r}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n\right] \Diamond (\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n)}{(\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n) \Diamond (\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n)}, \tag{10}$$

其中 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 是两个任意的线性无关向量组。

证明 将 (6) 两端外全点乘以 $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n$，并除以不等于零的 $(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)\diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n)$，就得 (10)。要各 $I_r(\boldsymbol{T})$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的不变量，还要证它们与 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的选择无关。证法和定理 3.1 证 $\det\boldsymbol{T}$ 与 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 的选择无关类似。也可以这样看。因对任意 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 成立的 (2) 的右端线性依赖于各 $\boldsymbol{u}_i$，展开后的左端 $[(-\lambda)^n+\cdots+I_n]\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n$ 也线性依赖于各 $\boldsymbol{u}_i$。则方括号内的多项式(从而各 I_r) 与 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 无关。

5.3 定理 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的 n 个主不变量可用 $\boldsymbol{T}$ 的张量混合分量表示

$$I_r(\boldsymbol{T})=\frac{1}{r!}\delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r}T^{i_1}{}_{r_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r},\ r=1,\cdots,n. \tag{11}$$

证明 取基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 作为 (10) 式中的 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\}$，并考虑到 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}_i=T^j{}_i\boldsymbol{g}_j$ 和 $(\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n)\diamond(\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n)=1$，得

$$\begin{aligned}
I_r&=\Big[\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}_{i_1})\wedge\cdots\\
&\qquad\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{g}_{i_r})\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n\Big]\diamond(\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n)\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}(\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\\
&\qquad\wedge\boldsymbol{g}_{i_r}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n)\diamond(\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n)\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n(\boldsymbol{g}_1,\\
&\qquad\cdots,\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r},\cdots,\boldsymbol{g}_n)\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\boldsymbol{g}^{\sigma(1)}\otimes\cdots\\
&\qquad\otimes\boldsymbol{g}^{\sigma(n)}(\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r},\cdots,\boldsymbol{g}_n)\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta^{\sigma(1)}_1\cdots\\
&\qquad\delta^{\sigma(i_1)}_{i_1}\cdots\delta^{\sigma(i_r)}_{i_r}\cdots\delta^{\sigma(n)}_n\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta^{\sigma(i_1)}_{i_1}\cdots\delta^{\sigma(i_r)}_{i_r}T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r} T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}. \tag{12}$$

应注意的是，上面各式的 $i_1, \cdots, i_r$ 只遵守和号$\sum$规定求和。对固定的指标组 $i_1 < \cdots < i_r$（当然不求和）和 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$，考虑到哑指标可任意代换，我们有

$$\begin{aligned}
\delta^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}_{i_1\cdots i_r} T^{i_1}{}_{\sigma(i_1)}\cdots T^{i_r}{}_{\sigma(i_r)} &= \delta^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)} T^{\sigma(i_1)}{}_{\sigma(i_1)}\cdots T^{\sigma(i_r)}{}_{\sigma(i_r)} \\
&= \operatorname{sgn}\sigma\, \delta^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}_{i_1\cdots i_r} T^{\sigma(i_1)}{}_{\sigma(i_1)}\cdots T^{\sigma(i_r)}{}_{\sigma(i_r)} \\
&= (\operatorname{sgn}\sigma)^2 \delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r} T^{\sigma(i_1)}{}_{\sigma(i_1)}\cdots T^{\sigma(i_r)}{}_{\sigma(i_r)} \\
&= \delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r} T^{i_1}{}_{i_1}\cdots T^{i_r}{}_{i_r}\ (\text{对 } i_1, \cdots, i_r \text{ 不求和}).
\end{aligned} \tag{13}$$

最后一等式是基于 $\boldsymbol{T}$ 的各分量上下标均受到相同的置换，而数的乘积次序是可以交换的，因此可将分量按 $i_1 < \cdots < i_r$ 的次序排列。就是说，(12) 右端的每一项对指标 $i_1, \cdots, i_r$ 可进行任意置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$，其值不变。再考虑到 $\{i_1, \cdots, i_r\}$ 中有重复指标时，广义 Kronecker 符号等于零。于是，从 (12) 式就可得 (11) 式。

5.4 定义 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的第一主不变量

$$\begin{aligned}
I_1(\boldsymbol{T}) &= \delta^i_j T^j{}_i = T^i{}_i = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_i) = \mathbf{C}\boldsymbol{T} =: \operatorname{tr}\boldsymbol{T} \\
&= \delta^i_j \boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_i) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^i)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_i) \\
&= \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}_i) = \mathbf{C}_{(1,3)(2,4)}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{I}:\boldsymbol{T}
\end{aligned} \tag{14}$$

称为 $\boldsymbol{T}$ 的迹。

5.5 定理 迹有性质（$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$是仿射量）：

(i) $\operatorname{tr}(\alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{S}) = \alpha\operatorname{tr}\boldsymbol{T} + \beta\operatorname{tr}\boldsymbol{S},\ \forall\alpha, \beta \in \mathrm{R},$ (15)

(ii) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{S}^*:\boldsymbol{T}.$ (16)

证明

(i) 按定义 5.4，并根据缩并的线性性质，有

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{S}) &= \mathbf{C}(\alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{S}) = \alpha\mathbf{C}\boldsymbol{T} + \beta\mathbf{C}\boldsymbol{S} \\
&= \alpha\operatorname{tr}\boldsymbol{T} + \beta\operatorname{tr}\boldsymbol{S}.
\end{aligned}$$

(ii) 同理，

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{S}) = \mathbf{C}_{(1,2)}(\mathbf{C}_{(2,3)}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S})) \\
&= \mathbf{C}_{(1,4)(2,3)}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}) \\
&= \boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^i) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^i)
\end{aligned}$$

$$= S(g^j, g^i)T(g_i, g_j) = S\otimes T(g^j, g^i, g_i, g_j)$$
$$= \mathbf{C}_{(1,4)(2,3)}(S\otimes T) = \mathrm{tr}(ST)$$
$$= \mathbf{C}_{(1,3)(2,4)}(S^*\otimes T) = S^*:T.$$

5.6 推论

(i) $\mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{r} T_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{tr}\, T_i$, (17)

(ii) $\mathrm{tr}\,(T_1\cdots T_r) = \mathrm{tr}(T_{i+1}\cdots T_r T_1\cdots T_i)$. □ (18)

现在再回到(3)式.

5.7 定义 仿射量 T 的**特征多项式**是

$$f(\lambda) := (-\lambda)^n + I_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + I_{n-1}(-\lambda) + I_n, \quad (19)$$

它的次数等于 $\dim \mathscr{V}$. □

由于 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 是任意线性无关向量组, (3)式给出

$$f(\lambda) = \det(T - \lambda I). \quad (20)$$

仿射量 T 的各主不变量, 特征多项式和(20)都是从 T 在右点乘意义下实现线性变换的角度得出来的. 现证, 在左点乘意义下结果也相同. 事实上, 由 $(3.1)_2$, 我们又有

$$(\boldsymbol{u}_1(T - \lambda I))\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{u}_n(T - \lambda I))$$
$$= \det(T - \lambda I)\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n.$$

展开后, 又有

$$\tilde{f}(\lambda) = \det(T - \lambda I), \quad (21)$$

其中 n 次多项式

$$\tilde{f}(\lambda) := (-\lambda)^n + \tilde{I}_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \tilde{I}_{n-1}(-\lambda) + \tilde{I}_n. \quad (22)$$

比较(20)和(21), 就有两个 n 次多项式的相等:

$$\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda),$$

从而, 这两个多项式的系数, 即各主不变量, 相等

$$\tilde{I}_r(T) = I_r(T), \quad r = 1, \cdots, n. \quad (23)$$

这样, 我们就有

5.8 定理 仿射量 T 的主不变量和特征多项式是 T 的仿射量属性, 与 T 实现(右或左点乘)线性变换的方式无关.

5.9 定理 仿射量 T 及其转置 T^* 有相同的主不变量和特征

多项式:

$$I_r(T^*) = I_r(T),\quad r = 1,\cdots,n. \tag{24}$$

证明 由 $\boldsymbol{T}^* - \lambda\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^* - \lambda\boldsymbol{I}^* = (\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})^*$ 及 $\det\boldsymbol{T}^* = \det\boldsymbol{T}$, 有 $\det(\boldsymbol{T}^* - \lambda\boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = f(\lambda)$.

5.10 定义 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的 r 次幂的迹称为 $\boldsymbol{T}$ 的 r 次矩,记作

$$\bar{I}_r(\boldsymbol{T}) := \mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}^r. \quad \square \tag{25}$$

三维空间的结果寓于上述的一般结果之中,但又有其特殊性.这时,我们常记 $\mathrm{I} = I_1$, $\mathrm{II} = I_2$, $\mathrm{III} = I_3$, $\boldsymbol{T}$ 的特征多项式就成为(乘以-1)

$$f(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{II}\lambda - \mathrm{III}. \tag{26}$$

如果令线性无关向量为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}_3$, 则 $\boldsymbol{T}$ 的三个主不变量满足

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{I}\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{Ta})\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{Tb})\wedge\boldsymbol{c}\\
&\qquad\qquad + \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{Tc}),\\
&\mathrm{II}\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{Tb})\wedge(\boldsymbol{Tc}) + (\boldsymbol{Ta})\wedge\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{Tc})\\
&\qquad\qquad + (\boldsymbol{Ta})\wedge(\boldsymbol{Tb})\wedge\boldsymbol{c},\\
&\mathrm{III}\ \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{Ta})\wedge(\boldsymbol{Tb})\wedge(\boldsymbol{Tc}).
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

记 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 为 $[\boldsymbol{abc}]$, 对 (27) 取 Hodge 对偶,并利用 (II. 10. 25) 的结果 $*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{abc}]$, 有

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{I} = \frac{[(\boldsymbol{Ta})\boldsymbol{bc}] + [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{Tb})\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{Tc})]}{[\boldsymbol{abc}]},\\
&\mathrm{II} = \frac{[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{Tb})(\boldsymbol{Tc})] + [(\boldsymbol{Ta})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{Tc})] + [(\boldsymbol{Ta})(\boldsymbol{Tb})\boldsymbol{c}]}{[\boldsymbol{abc}]},\\
&\mathrm{III} = \frac{[(\boldsymbol{Ta})(\boldsymbol{Tb})(\boldsymbol{Tc})]}{[\boldsymbol{abc}]}.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

分别取 $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$ 作为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 又得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{I} = \frac{1}{1!}\delta^{i}_{r}T^{r}{}_{i},\\
&\mathrm{II} = \frac{1}{2!}\delta^{ij}_{rs}T^{r}{}_{i}T^{s}{}_{j},\\
&\mathrm{III} = \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}T^{r}{}_{i}T^{s}{}_{j}T^{t}{}_{k}.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

在上述分量表达式中，利用 Kronecker 符号表示广义 Kronecker 符号，再应用迹的定义，就可得仿射量三个主不变量和三个矩的关系：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= \bar{I}_1, \\ \mathrm{II} &= \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^2 - \bar{I}_2\right), \\ \mathrm{III} &= \frac{1}{6}\bar{I}_1^3 - \frac{1}{2}\bar{I}_1\bar{I}_2 + \frac{1}{3}\bar{I}_3. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

一般地，I_r 是前 r 个矩的多项式。

5.11 定理（Nanson 公式） 在三维内积空间 $\mathscr{V}$，对于正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 和任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$，恒有

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}) = \mathrm{III}\boldsymbol{T}^{-*}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}). \tag{31}$$

证明 将 $(28)_3$ 写成

$$\begin{aligned} \mathrm{III}\,\boldsymbol{c}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= [(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})]\boldsymbol{T}\boldsymbol{c} \\ &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}^*[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})]. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}$ 的任意性及内积的正定性给出

$$\boldsymbol{T}^*[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})] = \mathrm{III}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}.$$

由 $\boldsymbol{T}$ 的正则性就得 (31).

§6 特征方程，特征值和特征方向

公式 (5.20)

$$f(\lambda) = \det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) \tag{1}$$

对任何 $\lambda \in \mathrm{R}$ 成立.

6.1 定义 λ 称为仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的**特征值**（或**主值**），如果它是**特征方程**

$$f(\lambda) = 0 \tag{2}$$

的一个实数解. □

$f(\lambda)$ 是 n 次多项式，不一定有实根. 如果 $n = \dim\mathscr{V}$ 是奇数，考虑到

$$\lim_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda\to-\infty} f(\lambda) = +\infty, \tag{3}$$

则 $f(\lambda)$ 至少有一个实根. 又从 $f(0) = \det \boldsymbol{T}$ 可知，有正(负)行列式的奇维数空间的仿射量至少有一个正(负)特征值.

6.2 定理 如果仿射量 $\boldsymbol{T}$ 有特征值 λ，则必存在 $\boldsymbol{T}$ 的属于特征值 λ 的右特征向量 $\boldsymbol{r}(\neq\boldsymbol{o})$ 和左特征向量 $\boldsymbol{l}(\neq\boldsymbol{o})$，分别满足

$$\boldsymbol{Tr} = \lambda\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{lT} = \lambda\boldsymbol{l}. \tag{5}$$

证明 根据定义 6.1 和 (1)，特征值 λ 使

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0. \tag{6}$$

这意味着 $\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}$ 是退化仿射量，根据推论 4.5，存在非零的向量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{l}$，使得

$$(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{o} \text{ 和 } \boldsymbol{l}(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{o}. \quad \square$$

更确切一点，(4) 和 (5) 式说明，$\boldsymbol{T}$ 有右和左特征方向. 由 $\boldsymbol{T}$ 的线性性质，具有这个方向(即与 $\boldsymbol{r}$ 或 $\boldsymbol{l}$ 共线)的一切非零向量都是右或左特征向量. 我们经常用单位向量代表这种方向. 如果 $\boldsymbol{r}'$ 不和 $\boldsymbol{r}$ 共线，但也满足 (4)，则 $\boldsymbol{r}'$ 也是 $\boldsymbol{T}$ 的右特征向量，而 $\forall\alpha, \beta\in\mathrm{R}$，恒有

$$\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{r} + \beta\boldsymbol{r}') = \lambda(\alpha\boldsymbol{r} + \beta\boldsymbol{r}'),$$

即 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 的任何线性组合也是 $\boldsymbol{T}$ 的右特征方向. 由此有

6.3 定理 $\boldsymbol{T}$ 的属于特征值 λ 的右特征向量的全体加上零向量构成 $\mathscr{V}$ 的一个子空间，称为属于特征值 λ 的**右特征子空间**，记作 $\mathscr{V}_r(\lambda)$. 同理也有**左特征子空间** $\mathscr{V}_l(\lambda)$.

6.4 定义 $\boldsymbol{T}$ 的特征值的全体 $\sigma(\boldsymbol{T}) = \{\lambda\in\mathrm{R} | f(\lambda) = 0\}$ 称为 $\boldsymbol{T}$ 的谱.

6.5 推论 $\forall\lambda\in\sigma(\boldsymbol{T})$，$\begin{pmatrix}右\\左\end{pmatrix}$ 特征子空间是 $\boldsymbol{T}$-$\begin{pmatrix}右\\左\end{pmatrix}$ 不变的，即

$$\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}_r(\lambda) \Rightarrow \boldsymbol{Tu}\in\mathscr{V}_r(\lambda),$$

$$\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}_l(\lambda) \Rightarrow \boldsymbol{vT}\in\mathscr{V}_l(\lambda).$$

6.6 定义 如果 $\boldsymbol{T}$ 的属于特征值 λ 的右和左特征方向相同，

则此方向称为特征方向.

§7 Cayley-Hamilton 定理

7.1 定理 任意仿射量 $\boldsymbol{T}$ 满足它的特征方程

$$f(\boldsymbol{T}) \equiv (-\boldsymbol{T})^n + I_1(-\boldsymbol{T})^{n-1} + \cdots + I_{n-1}(-\boldsymbol{T}) + I_n \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}. \quad \square \tag{1}$$

上式常称为 $\boldsymbol{T}$ 的 **Cayley-Hamilton 方程.**

证明 分别用 $(-\boldsymbol{T})^{n-1}\boldsymbol{u}_n$, $(-\boldsymbol{T})^{n-2}\boldsymbol{u}_n$, $\cdots$, $(-\boldsymbol{T})^{n-r}\boldsymbol{u}_n$, $(-\boldsymbol{T})^{n-(r+1)}\boldsymbol{u}_n, \cdots$, $(-\boldsymbol{T})\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{u}_n$ 代替 §5 中各主不变量定义式的 $\boldsymbol{u}_n$, 得

$$\begin{aligned}
&I_1\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-1}\boldsymbol{u}_n)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{n-1}\right)\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-1}\boldsymbol{u}_n)\\
&\quad-\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{n-1}\wedge((-\boldsymbol{T})^n\boldsymbol{u}_n),\\
&I_2\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-2}\boldsymbol{u}_n)\\
&=\left(\sum_{1\leqslant i<j<n}\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_j)\wedge\cdots\right.\\
&\quad\left.\wedge\boldsymbol{u}_{n-1}\right)\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-2}\boldsymbol{u}_n)\\
&\quad-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_i)\wedge\cdots\right.\\
&\quad\quad\left.\wedge\boldsymbol{u}_{n-1}\right)\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-1}\boldsymbol{u}_n),\\
&\cdots\\
&I_r\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-r}\boldsymbol{u}_n)\\
&=\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r<n}\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i_1})\wedge\cdots\right.\\
&\quad\left.\wedge(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_{i_r})\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_{n-1}\right)\wedge((-\boldsymbol{T})^{n-r}\boldsymbol{u}_n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{r-1}<n} u_1\wedge\cdots\wedge(Tu_{i_1})\wedge\cdots\\
&\wedge(Tu_{i_{r-1}})\wedge\cdots\wedge u_{n-1}\Big)\wedge((-T)^{n-r+1}u_n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&I_{r+1}u_1\wedge\cdots\wedge((-T)^{n-r-1}u_n)\\
=&\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{r+1}<n} u_1\wedge\cdots\wedge(Tu_{i_1})\wedge\cdots\\
&\wedge(Tu_{i_{r+1}})\wedge\cdots\wedge u_{n-1}\Big)\wedge((-T)^{n-r-1}u_n)\\
&-\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r<n} u_1\wedge\cdots\wedge(Tu_{i_1})\wedge\cdots\\
&\wedge(Tu_{i_r})\wedge\cdots\wedge u_{n-1}\Big)\wedge((-T)^{n-r}u_n),
\end{aligned}
$$

$\cdots$

$$
\begin{aligned}
&I_{n-1}u_1\wedge\cdots\wedge((-T)u_n)\\
=&(Tu_1)\wedge\cdots\wedge(Tu_{n-1})\wedge((-T)u_n)\\
&-\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(Tu_1)\wedge\cdots\wedge u_i\wedge\cdots\wedge(Tu_{n-1})\Big)\\
&\quad\wedge((-T)^2u_n),\\
&I_nu_1\wedge\cdots\wedge u_n=O-(Tu_1)\wedge\cdots\\
&\wedge(Tu_{n-1})\wedge((-T)u_n).
\end{aligned}
$$

将上面 n 个式子的左右端分别相加，考虑到前一式右端的第一项总和后一式右端的第二项相消，得

$$
\begin{aligned}
&u_1\wedge\cdots\wedge u_{n-1}\wedge(((-T)^n+I_1(-T)^{n-1}+\cdots\\
&+I_{n-1}(-T)+I_nI)u_n)=O. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

前 $n-1$ 个向量的任意性使这个零 n-形式的最后一个向量只能是零向量：

$$
\begin{aligned}
&((-T)^n+I_1(-T)^{n-1}+\cdots+I_{n-1}(-T)\\
&\qquad+I_nI)u_n=o. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

若不然，可这样选取 $u_1,\cdots,u_{n-1}$，使之和这个非零向量构成一个线性无关组而与 (2) 矛盾．又由 u_n 的任意性，(3) 式括号内的

张量和只能是零仿射量，从而得证 (1)． □

利用 Cayley-Hamilton 方程，任何 $\boldsymbol{T}^r$, $(r \geqslant n)$ 可用 $\boldsymbol{T}^{n-1}, \cdots, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{I}$ 及 $\boldsymbol{T}$ 的 n 个主不变量表达．

§8 对称仿射量

8.1 定义 仿射量 $\boldsymbol{S}$ 称为**对称的**，如果

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^* \quad \text{即} \quad S^i{}_{\cdot j} = S_j{}^{\cdot i} \quad \text{或} \quad S_{ij} = S_{ji}. \tag{1}$$

对于单位向量 $\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{t}$，标量

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{S}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = S_{ij}n^i t^j \tag{2}$$

称为 $\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 方向的**剪分量**．若 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{t} = 0$，则 (2) 称为**正交剪分量**．若 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}$，作为 (2) 的特殊情形

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = S_{ij}n^i n^j \tag{3}$$

称为 $\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的**法分量**． 若 $\boldsymbol{S}$ 在任何方向的法分量大于零，$\boldsymbol{S}$ 称为**正定的**． □

显然，对称仿射量的全体构成二阶张量空间 $\mathrm{Lin} \equiv \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$ 的子空间，记作 Sym，而正定对称仿射量的全体则记为 Psym．

8.2 定理 $\boldsymbol{S}$ 的属于同一特征值 λ 的左，右特征方向相同，从而左，右特征子空间也相同，可同记为 $\mathscr{V}(\lambda)$．

证明 设 $\boldsymbol{e}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的属于 λ 的右特征向量：$\boldsymbol{S}\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$． 考虑到 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{e}\boldsymbol{S}$，有 $\boldsymbol{e}\boldsymbol{S} = \lambda\boldsymbol{e}$． □

因此，今后可以只考虑右点乘的作用．

8.3 定理 对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 有特征值和特征向量．

证明 我们不直接讨论特征多项式 $f(\lambda)$，而是定义一个函数

$$F(\boldsymbol{v}) := \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}}, \quad \forall \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o} \in \mathscr{V}. \tag{4}$$

$F(\boldsymbol{v})$ 是两个连续函数的商，因而也是连续函数，并且是零次齐次的：

$$F(\alpha\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}), \quad \forall \alpha \neq 0 \in \mathrm{R}. \tag{5}$$

现讨论 F 在单位球面 $B = \{\boldsymbol{v} \mid |\boldsymbol{v}| = 1\}$ 上的值． 因为 B 是 $\mathscr{V}$

的有界闭子集，F 必在某 $e_1 \in B$ 上达到极小

$$F(e_1) \leqslant F(v).$$

根据(5)，有

$$F(e_1) \leqslant F(v), \quad \forall v \neq o \in \mathscr{V}. \tag{6}$$

对任意给定 $u \in \mathscr{V}$，定义过 e_1 端点沿 u 方向的直线上的函数

$$G(t) = F(e_1 + tu), \quad \forall t \in \mathrm{R}. \tag{7}$$

根据(6)，G 在 $t = 0$ 处取极小值，因此 $G'(0) = 0$. 将(4)代入(7)，得

$$G(t) = \frac{(e_1 + tu)S(e_1 + tu)}{(e_1 + tu)(e_1 + tu)}.$$

对 t 微商，在 $t = 0$ 处，有

$$G'(0) = 2uSe_1 - 2(e_1u)(e_1Se_1), \tag{8}$$

从而

$$(Se_1 - (e_1Se_1)e_1)u = 0. \tag{9}$$

上式对每一个 u 成立. 根据内积的正定性，有

$$Se_1 = \lambda_1 e_1, \quad \lambda_1 = e_1Se_1. \tag{10}$$

可见，λ_1 和 e_1 是 S 的一个特征值和属于 λ_1 的一个特征向量.

8.4 定理 对称仿射量 S 的属于不同特征值的特征子空间相互正交：

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow \mathscr{V}(\lambda) \perp \mathscr{V}(\lambda'). \tag{11}$$

证明 设 $Se = \lambda e$, $Se' = \lambda' e'$, 则 $e'Se = \lambda ee'$, $eSe' = \lambda' ee'$. 考虑到 S 的对称性，由后两式有

$$(\lambda - \lambda')ee' = 0.$$

由假设 $\lambda \neq \lambda'$，我们有

$$ee' = 0, \ \forall e \in \mathscr{V}(\lambda); \ e' \in \mathscr{V}(\lambda'). \tag{12}$$

8.5 定理 对称仿射量 S 有一组标准正交特征向量 $\{e_i\}$. 这些特征向量分别属于特征子空间 $\mathscr{V}(\lambda_1), \cdots, \mathscr{V}(\lambda_r)$. 若记 $k_i = \dim \mathscr{V}(\lambda_i)$, $i = 1, \cdots, r$, 则

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{V}(\lambda_r), \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n, \tag{13}$$

$$f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{k_1}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{k_r}. \tag{14}$$

证明 由定理 8.3，$\boldsymbol{S}$ 有特征值 λ_1 和所属的单位特征向量 $\boldsymbol{e}_1$. 由 $\boldsymbol{e}_1$ 张成的子空间的正交补

$$\mathscr{V}_1=\{\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{e}_1\}$$

是一个子空间. 把 $\boldsymbol{S}$ 的作用限制于 $\mathscr{V}_1$，又可得属于 λ_2（不一定 $\neq\lambda_1$）的单位特征向量 $\boldsymbol{e}_2$，满足 $\boldsymbol{e}_2\perp\boldsymbol{e}_1$. 将这过程对 $\mathscr{V}_2=\{\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$，$\mathscr{V}_3=\{\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}\cdots$进行下去，我们最终得到 n 个相互正交的单位向量 $\{\boldsymbol{e}_i\}$. 属同一个特征值 λ_i 的全体单位特征向量（相互正交，k_i 个）张成 $\mathscr{V}(\lambda_i)$. 由于任意 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$ 可由 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 线性表出，而且 $\mathscr{V}(\lambda_i)\cap\mathscr{V}(\lambda_j)=\{\boldsymbol{o}\}$，$i\neq j$，故有 $(13)_1$. $(13)_2$ 是显然的. 任何 $\mathscr{V}(\lambda_i)$ 是 $\boldsymbol{S}$-不变的，即

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}=\lambda_i\boldsymbol{v},\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}(\lambda_i). \tag{15}$$

因此限制在 $\mathscr{V}(\lambda_i)$ 的 $\boldsymbol{S}$ 的特征多项式为

$$f_i(\lambda)=(\lambda_i-\lambda)^{k_i}. \tag{16}$$

其根据是，我们有下述关系式 $(i=1,\cdots,r)$

$$((\boldsymbol{S}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{j_1})\wedge\cdots\wedge((\boldsymbol{S}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{j_{k_i}})=f_i(\lambda)\boldsymbol{u}_{j_1}\wedge\cdots\boldsymbol{u}_{j_{k_i}},$$
$$\forall\boldsymbol{u}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{u}_{j_{k_i}}\in\mathscr{V}(\lambda_i). \tag{17}$$

将这 r 个公式进行外积，和 (5.2) 比较，就得 (14). □

可见，特征方程的根的重数等于属于该根的特征子空间的维数.

8.6 定理 仿射量 $\boldsymbol{S}$ 是对称的，当且仅当它有**谱表示**

$$\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i, \tag{18}$$

其中 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是标准正交基.

证明 设 $\boldsymbol{S}$ 为对称. 取定理 8.5 证明中得到的标准正交特征向量组作为 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，则有表示式 $\boldsymbol{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$. 按分量的定义，并考虑到 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$（对 i 不求和），有

$$S_{ji}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i=\begin{cases}\lambda_i, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$$

代回表示式就有 (18). 反之，如果仿射量 $\boldsymbol{S}$ 有表示式，则显然满足

$S = S^*$. □

谱表示 (18) 中的 λ_i 可能有相同者. 在基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 下, $\boldsymbol{S}$ 的分量矩阵是对角阵:

$$[S_{ij}] = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots, \lambda_r, \cdots, \lambda_r). \qquad (19)$$

把 (19) 代入 (5.12), 就得

8.7 推论 对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的 n 个主不变量的主值表示是

$$I_r(\boldsymbol{S}) = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r}, \quad r = 1, \cdots, n. \qquad (20)$$

特别地,

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad I_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \quad □ \qquad (21)$$

这里考虑到

$$\begin{aligned} I_r(\boldsymbol{S}) &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} S^{j_1}{}_{i_1}\cdots S^{j_r}{}_{i_r} \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma\, \delta^{\sigma(i_1)}_{j_1}\cdots\delta^{\sigma(i_r)}_{j_r} S^{j_1}{}_{i_1}\cdots S^{j_r}{}_{i_r} \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \mathrm{sgn}\sigma\, S^{\sigma(i_1)}{}_{i_1}\cdots S^{\sigma(i_r)}{}_{i_r} \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} S_{i_1 i_1}\cdots S_{i_r i_r}\ (\text{在主标准正交基下}). \end{aligned}$$

由 $(21)_2$ 可知, 正则对称仿射量的主值均不等于零. 根据定义 8.1 和谱表示 (18) 又有, 正定对称仿射量的主值均大于零, 因为 λ_i 就是 $\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的法分量. 由此及 (20) 式可得结论, 正定仿射量的主不变量均大于零. 在正定对称仿射量作用下, 整个空间 $\mathscr{V}$ 沿各特征方向被均匀地拉长等于相应主值的倍数, 故有时称这种仿射量是**纯变形仿射量**. 容易验证, 对任意非负整数 p, 我们有

$$\boldsymbol{S}^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i, \qquad (22)$$

特别地, $\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{I}$. 推广 (22), 可以定义 $\boldsymbol{S}$ 的某类型的仿射量函数: 若 $F(\lambda)$ 在实数域里有意义, 则可定义

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S}) := \sum_{i=1}^{n} F(\lambda_i) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i. \qquad (23)$$

例如，对非负主值的对称仿射量可以开方

$$S^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{p}} e_i \otimes e_i, \quad \forall p \in \mathbf{Z}^+, \tag{24}$$

约定 $\lambda_i^{\frac{1}{p}}$ 取非负实根. 而对正定的 $\boldsymbol{S}$，还可以求对数

$$\ln \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i e_i \otimes e_i. \tag{25}$$

这些只是各向同性张量函数的特殊情形. 对于一般张量函数，将在下一章论及.

8.8 定理 正则对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的逆 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 亦对称. 若 $\boldsymbol{S}$ 有谱表示 (18)，则 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 有谱表示

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} e_i \otimes e_i. \tag{26}$$

证明 只要应用 (4.12) 于 $\boldsymbol{S}^{-1}$，并考虑 $\boldsymbol{S}$ 的对称性，即得

$$(\boldsymbol{S}^{-1})^* = (\boldsymbol{S}^*)^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}.$$

设 λ_i 是 $\boldsymbol{S}$ 的特征值，e_i 是所属的单位特征向量:

$$\boldsymbol{S}e_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \cdots, n. \quad (\text{对 } i \text{ 不求和})$$

将 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 作用于上式，得 $\boldsymbol{S}^{-1}e_i = \lambda_i^{-1}e_i$. 可见，$\lambda_i^{-1}$ 是对称仿射量 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 的特征值，e_i 是所属特征向量. 应用定理 8.6 于 $\boldsymbol{S}^{-1}$，就得 (26).

8.9 定义 满足条件 $\operatorname{tr}\boldsymbol{S} = 0$ 的对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 称为**偏量**；可表达为 $\boldsymbol{S} = \lambda \boldsymbol{I}$ $(\lambda \in \mathrm{R})$ 的 $\boldsymbol{S}$ 称为**球仿射量**. □

对于 $n > 4$，不可能求得特征方程的根的封闭表达式.

例 求三维空间对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的三个特征值的表达式.

解 计算 $\boldsymbol{S}$ 的三个主不变量，列特征方程

$$\lambda^3 - \mathrm{I}\lambda^2 + \mathrm{II}\lambda - \mathrm{III} = 0. \tag{27}$$

为了消去二次项，进行换元

$$\lambda = x + \frac{\mathrm{I}}{3}, \tag{28}$$

得

$$x^3 + px + q = 0, \tag{29}$$

其中

$$p = \mathrm{II} - \frac{\mathrm{I}^2}{3},$$

$$q = \frac{1}{3}\mathrm{I\,II} - \frac{2}{27}\mathrm{I}^3 - \mathrm{III} = -\det\left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\right).$$

既然已知(29)的三个根都是实根,则其判别式

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leqslant 0,$$

于是可令

$$e^2 = -p = \frac{\mathrm{I}^2}{3} - \mathrm{II},$$

这时

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^2}{3}\right)^3.$$

根据 Cardano 公式,可得(29)的三个根:

$$x_1 = \frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$x_2 = \frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\varphi,$$

$$x_3 = \frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right),$$

其中

$$\varphi = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3\sqrt{3}\,q}{2e^3}, \quad -\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}. \tag{30}$$

最后代回(28),得 $\boldsymbol{S}$ 的三个特征值:

$$\lambda_1 = \frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{I},$$

$$\lambda_2 = \frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\varphi + \frac{1}{3}\mathrm{I},$$

$$\lambda_3 = \frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{I}.$$

根据(30)式的 φ 的变化范围，可知 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$.

8.10 定理 若张量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 可交换，即 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{TS}$，则 $\boldsymbol{T}$ 保持 $\boldsymbol{S}$ 的每个特征空间 $\mathscr{V}(\lambda)$ 不变:

$$\boldsymbol{e}\in\mathscr{V}(\lambda)\Rightarrow \boldsymbol{Te}\in\mathscr{V}(\lambda).$$

反之，若 $\boldsymbol{T}$ 保持对称张量 $\boldsymbol{S}$ 的每个特征空间不变，则 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 可交换。

证明 设 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{TS}$，则 $\forall \boldsymbol{e}\in\mathscr{V}(\lambda)$ 有

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Te})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Se})=\lambda(\boldsymbol{Te})\in\mathscr{V}(\lambda).$$

为了证明定理的第二部分，任取 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$，则由定理 8.5 有 $\boldsymbol{v}=\sum\limits_{i=1}^{r}\boldsymbol{v}_i$，$\boldsymbol{v}_i\in\mathscr{V}(\lambda_i)$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{STv}&=\boldsymbol{ST}\left(\sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{v}_i\right)=\boldsymbol{S}\sum_{i=1}^{r}(\boldsymbol{Tv}_i)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\boldsymbol{Tv}_i\\&=\boldsymbol{T}\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\boldsymbol{v}_i\right)=\boldsymbol{T}\sum_{i=1}^{r}(\boldsymbol{Sv}_i)=\boldsymbol{TS}\left(\sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{v}_i\right)\\&=\boldsymbol{TSv}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{v}$ 的任意性，得 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{TS}$.

§9 反称仿射量

9.1 定义 仿射量 $\boldsymbol{A}$ 称为**反称的**，如果

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^*，\text{即 } A^i{}_j=-A_j{}^i \text{ 或 } A_{ij}=-A_{ji}. \tag{1}$$

9.2 定理 对于反称仿射量 $\boldsymbol{A}$，任何 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$ 的象 $\boldsymbol{Au}$ 和 $\boldsymbol{uA}$ 均与 $\boldsymbol{u}$ 正交。

证明 利用(1.15)和第 II 章的定理 6.6，我们有

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{Au})=(\boldsymbol{uA})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{uAu}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=0,$$

即 $\boldsymbol{Au}$, $\boldsymbol{uA}\perp\boldsymbol{u}$, $\forall\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$.

9.3 推论 反称仿射量 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值 $\lambda=0$.

证明 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的右特征向量: $\boldsymbol{Au}=\lambda\boldsymbol{u}$. 根据定理 9.2,

$$0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \Longrightarrow \lambda = 0. \quad \square$$

显然，反称仿射量的全体构成二阶张量空间 $\mathscr{T}_2(\mathscr{V})$ 的子空间，记作 Skw.

9.4 定理 对于反称仿射量 $\boldsymbol{A}$,

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = 0, \quad \det \boldsymbol{A} = (-1)^n \det \boldsymbol{A}. \tag{2}$$

证明 考虑到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{u}\boldsymbol{A}$，由

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n\right] \diamondsuit (\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n)}{\det [\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_j]}$$

$$= \frac{-\left[\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge (\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{A}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n\right] \diamondsuit (\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n)}{\det [\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_j]}$$

$$= -\operatorname{tr}\boldsymbol{A},$$

及

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{\det [(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{v}_j]}{\det [\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_j]} = \frac{\det[-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{u}_i]}{\det [\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_j]}$$

$$= \frac{(-1)^n \det [(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{u}_j]}{\det [\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{u}_j]}$$

即得 (2). $\square$

三维空间是特殊的，表现于：定义有叉乘，并且 $\boldsymbol{A}$ 在某种情况下具有小转动的几何意义。利用 $n = 3$ 时，$** = \mathrm{id}$，定义 $\boldsymbol{A}$ 的**反偶**(和对偶差一符号)：

$$\boldsymbol{\omega} = -*\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2!}\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} = -*\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

对任意 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}$,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{u})$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{u})$$

$$= *(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}. \tag{4}$$

现看在仿射量 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 下，$\boldsymbol{u}$ 的象的长度的平方：

$$[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}]^2=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}^2+[\boldsymbol{u\omega u}]$$
$$+[\boldsymbol{\omega uu}]+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{u}^2+(\boldsymbol{\omega u})^2$$
$$=\boldsymbol{u}^2[1+\boldsymbol{\omega}^2-(\boldsymbol{\omega n})^2], \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}/|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{\omega n}|\leqslant|\boldsymbol{\omega}|$. 若 $|\boldsymbol{\omega}|\ll 1$，则

$$|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}|\doteq|\boldsymbol{u}|. \tag{6}$$

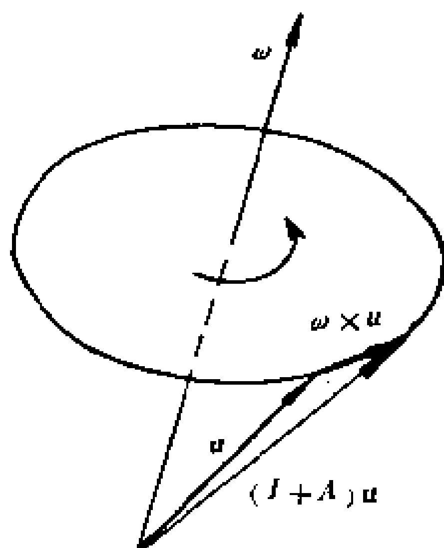


图 1

在这条件下，$\boldsymbol{u}$ 和它的象有几乎相近的长度，因此 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 实现小转动. $\boldsymbol{\omega}$ 称为**小转动向量**，$|\boldsymbol{\omega}|$ 为**转角**（图 1).

关于对称和反称仿射量，有

9.5 命题 设 $\boldsymbol{R},\boldsymbol{T}\in$ Lin；$\boldsymbol{S}\in$ Sym；$\boldsymbol{A}\in$ Skw，则

(i) $\boldsymbol{S}:\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{S}:\mathscr{S}\boldsymbol{T}$, (7)

(ii) $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{A}:\boldsymbol{T}^*=\boldsymbol{A}:\mathscr{A}\boldsymbol{T}$, (8)

(iii) $\boldsymbol{S}:\boldsymbol{A}=0$, (9)

(iv) "$\forall\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}:\boldsymbol{T}=0$" $\Longrightarrow\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$, (10)

(v) "$\forall\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}:\boldsymbol{T}=0$" $\Longrightarrow\boldsymbol{T}\in$ Skw, (11)

(vi) "$\forall\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{T}=0$" $\Longrightarrow\boldsymbol{T}\in$ Sym. (12)

证明 证明 (i) 和 (ii) 用到 (5.16).

(i) $\boldsymbol{S}:\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}^*:\boldsymbol{T}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{ST})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{TS})=\boldsymbol{T}^*:\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{T}^*$.

(ii) $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{A}^*:\boldsymbol{T}=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{AT})=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{TA})$

$= -T^*:A = -A:T^*.$

(iii) 利用结果 (i) 和 $A \in \text{Skw}$，有

$$S:A = S:A^* = -S:A.$$

(iv) $0 = R:T = R_{ij}T^{ij}$. 由 R 的任意性，可逐次选取只有一个分量不为零的 R，从而 T 的各分量必须为零.

(v) 利用 (i)，有 $S:\mathscr{S}T = 0$. 类似于 (iv) 的讨论给出

$$\mathscr{S}T = O, \text{ 即 } T = \mathscr{A}T \in \text{Skw}.$$

(vi) 同理有 $A:\mathscr{A}T = 0$，从而 $\mathscr{A}T = O$，即 $T = \mathscr{S}T \in \text{Sym}$.

§10 正交仿射量

10.1 定义 仿射量 Q 称为**正交的**，如果它保内积：

$$(Qu)(Qv) = uv, \quad \forall u,v \in \mathscr{V}. \tag{1}$$

10.2 定理 对于仿射量 Q，下列命题等价：

(i) Q 是正交的.

(ii) Q 保长度：

$$|Qu| = |u|, \quad \forall u \in \mathscr{V}. \tag{2}$$

(iii) 若 $\{e_i\}$ 是标准正交基，则 $\{Qe_i\}$ 也是.

(iv) $Q^*Q = I$，即 $Q_{ri}Q_{rj} = \delta_{ij}$ (在标准正交基下). (3)

证明 先证 (i) 和 (ii) 等价. 在(1)，取 $v = u$，开平方，即得(2). 将(2)写成

$$(Qu)(Qu) = uu, \tag{4}$$

以 $u + v$ 代替 u，并利用 (4)，又得 (1).

现证 (i) 和 (iii) 等价. 设 $\{e_i\}$ 是标准正交基：

$$e_ie_j = \delta_{ij}. \tag{5}$$

由 Q 的正交性定义 (1)，得 $\{Qe_i\}$ 的标准正交性：

$$(Qe_i)(Qe_j) = e_ie_j = \delta_{ij}. \tag{6}$$

反之，若 Q 满足 (6)，则对任意 $u = u_ie_i$，$v = v_je_j$，有

$$(Qu)(Qv) = u_iv_j(Qe_i)(Qe_j) = u_iv_je_ie_j = uv,$$

此即 (1)。

最后证 (i) 和 (iv) 等价。 将 (1) 写成 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$，由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的任意性，得 (3)。 反之，$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，利用 (3)，又得 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v})$，此即 (1)。

10.3 定理 正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{Q}=\pm 1$，因而 $\boldsymbol{Q}$ 是正则的，存在逆，且

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^*. \tag{7}$$

证明 若 $\boldsymbol{Q}$ 是正则的，则由 (3) 及逆的唯一性，即得 (7)。问题归结为要证

$$(\det \boldsymbol{Q})^2=1. \tag{8}$$

设 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ 是两个线性无关向量组。对 $\boldsymbol{Q}$ 两次应用定理 3.1，并分别两边进行外全点积，得

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_n)]\diamond[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_1)\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_n)]\\&=(\det \boldsymbol{Q})^2(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_n)\diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n),\end{aligned}$$

即

$$\det[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}_j)]=(\det \boldsymbol{Q})^2\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]. \tag{9}$$

考虑到定义 10.1 和 $\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_j]\neq 0$，即得 (8)。□

利用 (3.17)，又得

10.4 定理 正交仿射量的全体构成群，称为**一般正交群**，记作 Orth。行列式等于 $+1$ 的称为**第一类**正交仿射量，它们的全体构成 Orth 的子群，称为**特殊正交群**，记作 Orth^+，而行列式等于 -1 的称为**第二类**，记作 Orth^-。

10.5 定理 正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 有性质：

(i) $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{I}$, (10)

(ii) $(\boldsymbol{u}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$, (11)

(iii) $|\boldsymbol{u}\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{u}|$, $\forall \boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$, (12)

(iv) 若 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是标准正交基，则 $\{\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{Q}\}$ 也是。

证明 将 (7) 应用于 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{I}$，得 (10)。 将 (10) 应用于任意 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的内积，得 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{u}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{Q})$，此即 (11)。类似于定理 10.2，用 (11) 即可证 (iii) 和 (iv)。□

定理 10.5 的四个性质是四个等价的命题，通过定理 10.3 作桥梁和定理 10.2 的四个等价命题相对应，差别在于右作用和左作用。这八个性质中的任一个都可作为正交仿射量的定义。

10.6 推论 正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 的逆（即转置）$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{*}$ 也是正交仿射量。

证明 只需将 $(\boldsymbol{Q}^{*})^{*}=\boldsymbol{Q}$ 代入 (10)，即得

$$(\boldsymbol{Q}^{*})^{*}\boldsymbol{Q}^{*}=\boldsymbol{I}. \tag{13}$$

根据 (3)，$\boldsymbol{Q}^{*}$ 是正交仿射量。

10.7 定理 正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 的属于同一特征值 λ 的左、右特征子空间相同，记作 $\mathscr{V}(\lambda)$。

证明 设 $\boldsymbol{Q}$ 有特征值 λ 及所属的右特征向量 $\boldsymbol{r}$：

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r},\ \text{即}\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{Q}^{*}=\lambda\boldsymbol{r}. \tag{14}$$

则 $\boldsymbol{r}^2=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r})(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r})=\lambda^2\boldsymbol{r}^2$，从而

$$\lambda^2=1. \tag{15}$$

将 $\lambda\boldsymbol{Q}^{*}$ 右作用于 $(14)_1$ 两边，考虑到 (3) 和 (15)，得

$$\boldsymbol{Q}^{*}\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r},\ \text{即}\ \boldsymbol{r}\boldsymbol{Q}=\lambda\boldsymbol{r}. \tag{16}$$

最后一式正说明 $\boldsymbol{r}$ 也是 $\boldsymbol{Q}$ 属于 λ 的左特征向量。 □

从 (15) 和 (14)，(16)，分别又得

10.8 推论 如果正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 有特征值，则只能是 $+1$ 或 -1。

10.9 推论 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{Q}^{*}$ 有相同的特征值和特征子空间。

10.10 定理 当 n 为奇数时，第一类正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 有且只有一个特征值 $\lambda=1$。

证明 利用 $(6.3)_1$ 和 $f(0)=I_n=\det\boldsymbol{Q}=+1$，得多项式 $f(\lambda)$ 在正半轴有零点。根据推论 10.8，进一步得定理的结论。

10.11 定理 设子空间 $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}$ 是 $\boldsymbol{Q}$-不变的，则 $\mathscr{W}^{\perp}$ 也是 $\boldsymbol{Q}$-不变的。

证明 $\mathscr{W}$ 是 $\boldsymbol{Q}$-不变的，即 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{W}\Longrightarrow\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}\in\mathscr{W}$。设 $\dim\mathscr{W}=m$。取 $\mathscr{W}$ 的基 $\{\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$。$\boldsymbol{Q}$ 的正则性使 $\{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{g}_m\}$ 亦可作 $\mathscr{W}$ 的基。任何 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{W}$ 在它上分解

$$v = \sum_{i=1}^{m} u^i(Qg_i) = Q\left(\sum_{i=1}^{m} u^i g_i\right) = Qu.$$

这里 $u \in \mathscr{W}$，故任何 $v \in \mathscr{W}$ 是某 $u \in \mathscr{W}$ 的象，即 $Q^{-1}v = u \in \mathscr{W}$. 因而 $\mathscr{W}$ 也是 Q^{-1}-不变的. 今考虑任意 $u \in \mathscr{W}$ 和 $w \in \mathscr{W}^{\perp} = \{w \in \mathscr{V} \mid w \perp v, \forall v \in \mathscr{W}\}$，则 $u(Qw) = w(Q^{-1}u) = 0$. 故 $Qw \in \mathscr{W}^{\perp}$，即 $\mathscr{W}^{\perp}$ 是 Q-不变的.

10.12 定理 当 $\mathscr{V}$ 是定向平面(即 $n = 2$) 时，正交仿射量 Q 实现 $\mathscr{V}$ 的整体转动 ($\det Q = +1$) 或反射 ($\det Q = -1$).

证明 当 $n = 2$ 时，$f(\lambda)$ 是二次多项式，它没有实根，或有两个实根. 对前一情形，不存在特征方向. $f(\lambda) = \lambda^2 - I\lambda + \det Q$ 的判别式 $\Delta = I^2 - 4\det Q < 0$. 根据定理 10.3，$\det Q$ 只可能等于 $+1$，Q 是第一类正交仿射量. 保内积等价于保夹角：$\angle(u, v) = \angle(Qu, Qv)$, $\forall u, v \in \mathscr{V}$. 因此，$Qv$ 相对 Qu 的位置有两个可能性. 但只能取 $\{u, Qu\}$ 和 $\{v, Qv\}$ 定向相同的可能性. 若不然，则 v 和 Qv 均同在 u 和 Qu 的一个夹角之间. 如果连续地变动 v 至该夹角的等分角线，则保夹角性质使 Qv 也变动至该等分角线而与 v 重合. 这意味着该等分角线是特征方向而与本情形矛盾. 这样，Q 使每个向量沿相同方向转过 θ 角（沿正定向为正)，即将 $\mathscr{V}$ 整体地转过 θ 角. 在任意标准正交基 $\{e_1, e_2\}$ 下，

$$Qe_i = Q_{ji}e_j,$$
$$Qe_1 = Q_{11}e_1 + Q_{21}e_2 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2,$$
$$Qe_2 = Q_{12}e_1 + Q_{22}e_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2,$$

Q 有表示式及分量矩阵如下：

$$Q = \cos\theta e_1 \otimes e_1 - \sin\theta e_1 \otimes e_2 + \sin\theta e_2 \otimes e_1 + \cos\theta e_2 \otimes e_2, \tag{17}$$

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad 0 < |\theta| < \pi. \tag{18}$$

转角 θ 唯一地确定 $[Q_{ij}]$ 和 Q. 下面将看到，Q 也唯一地确定 θ. 设 θ_1 和 θ_2 分别是第一类正交仿射量 Q_1 和 Q_2 的转角，则由定理

10.4，Q_2Q_1 也是第一类正交仿射量，而由

$$[(Q_2Q_1)_{ij}]=\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta_2+\theta_1) & -\sin(\theta_2+\theta_1)\\ \sin(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1)\end{bmatrix},$$

知其转角是 $\theta_2+\theta_1$. 若令 $\boldsymbol{P}$ 是转角为 $-\dfrac{\pi}{2}$ 的第一类正交仿射量，则 $\boldsymbol{PQ}$ 的转角就是 $\theta-\dfrac{\pi}{2}$. 从 (18) 易得

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{Q},\quad \sin\theta=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{PQ}).\qquad(19)$$

上两式唯一地确定转角 $0<|\theta|<\pi$.

情形"$f(\lambda)$ 有两个实根"又分为两种情况:

(i) 特征值同时为 $+1$ 或 -1. $\boldsymbol{Q}$ 分别是 $\boldsymbol{I}$ 或 $-\boldsymbol{I}$, $\det\boldsymbol{Q}=+1$. 可以认为是转动的极限情形 $\theta\to 0$ 和 $\theta\to\pi$ 而合并到整体转动. 这时 (18) 和 (19) 对 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 有效.

(ii) 特征值分别是 $+1$ 和 -1. 根据定理 10.11，对应的两特征向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 相互正交. 这时 $f(\lambda)=\lambda^2-1$, $\det\boldsymbol{Q}=-1$, $\boldsymbol{Q}$ 属第二类正交仿射量. 以上述单位特征向量为基时，$\boldsymbol{Q}$ 的分量矩阵是

$$[Q_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

任何 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2$ 的象是 $\boldsymbol{Qv}=v_1\boldsymbol{e}_1-v_2\boldsymbol{e}_2$. $\boldsymbol{Q}$ 实现关于 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的反射，相当于将平面 $\mathscr{V}$ 绕 $\boldsymbol{e}_1$ 轴在三维空间里转过 π 角. □

现在讨论 n 维的一般情形.

10.13 定理 对于 n 维定向内积空间的正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$, 存在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，使 $\boldsymbol{Q}$ 的分量矩阵具有典则形式

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & Q_r & & \\ & & & I_s & \\ & & & & -I_t \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中

$$Q_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}, \ 0 < |\theta| < \pi, \ k = 1, \cdots, r, \tag{21}$$

I_s 和 I_t 分别是 s 和 t 阶的单位阵,满足 $2r + s + t = n$.

证明 $\boldsymbol{Q}$ 的特征值只可能是 $+1$ 或 -1. 记相应的特征子空间为 $\mathscr{V}_+ = \mathscr{V}(+1)$ 和 $\mathscr{V}_- = \mathscr{V}(-1)$. 设 $\dim \mathscr{V}_+ = s$, $\dim \mathscr{V}_- = t$. 下面证 $\mathscr{V}_+ \perp \mathscr{V}_-$. 事实上, 对任意 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}_+$, $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}_-$, 有 $\boldsymbol{Qu} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{Qv} = -\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{uv} = (\boldsymbol{Qu})(-\boldsymbol{Qv}) = -\boldsymbol{uv}$, 从而 $\boldsymbol{uv} = 0$. 显然 $\mathscr{V}_+ \oplus \mathscr{V}_-$ 是 $\boldsymbol{Q}$-不变的. 根据定理 10.11, $\mathscr{W} = (\mathscr{V}_+ \oplus \mathscr{V}_-)^\perp$ 也是 $\boldsymbol{Q}$-不变的, 但它已不包含 $\boldsymbol{Q}$ 的任何特征向量. 今考虑限制于 $\mathscr{W}$ 的对称仿射量

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^{-1}. \tag{22}$$

根据定理 8.3, $\boldsymbol{S}|_{\mathscr{W}}$ 有特征值 λ 和对应的特征向量 $\boldsymbol{e}$. 于是

$$\boldsymbol{Qe} + \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}.$$

将 $\boldsymbol{Q}$ 作用上式一次, 得

$$\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{Qe} - \boldsymbol{e}. \tag{23}$$

$\boldsymbol{Q}$ 在 $\mathscr{W}$ 无特征方向,因而 $\boldsymbol{Qe}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 线性无关, 张成一个二维子空间 $\mathscr{W}_1 \subset \mathscr{W}$. 由于

$$\boldsymbol{Q}(\alpha\boldsymbol{Qe} + \beta\boldsymbol{e}) = \alpha\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{e} + \beta\boldsymbol{Qe} = (\alpha\lambda + \beta)\boldsymbol{Qe} - \alpha\boldsymbol{e} \in \mathscr{W}_1,$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\mathscr{W}_1$ 是 $\boldsymbol{Q}$-不变的. 因为限制在 $\mathscr{W}_1$ 上的 $\boldsymbol{Q}$ 没有特征方向,根据定理 10.12, $\boldsymbol{Q}|_{\mathscr{W}_1}$ 实现 $\mathscr{W}_1$ 的整体转动. 进一步,关于 $\mathscr{W}$, 找出 $\mathscr{W}_1^\perp$, 又可考虑 (22) 的 $\boldsymbol{S}$ 在 $\mathscr{W}_1^\perp$ 的限制而得到 $\boldsymbol{Q}$-不变的二维子空间 $\mathscr{W}_2 \subset \mathscr{W}_1^\perp$. $\boldsymbol{Q}|_{\mathscr{W}_2}$ 实现 $\mathscr{W}_2$ 的整体转动. 这样继续做下去, 直到 $\mathscr{W}_{r-1}^\perp = \mathscr{W}_r$ 是二维的(不可能是一维的. 为

什么？)而穷尽$\mathscr{V}$. 于是我们有

$$\mathscr{V}=\mathscr{W}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{W}_r\oplus\mathscr{V}_+\oplus\mathscr{V}_-. \qquad (24)$$

$\boldsymbol{Q}|_{\mathscr{W}_i}$ 实现 $\mathscr{W}_i$ 的转动. 分别在上述各相互正交的 $\boldsymbol{Q}$-不变子空间取相应维数的标准正交基，按(24)的顺序组成$\mathscr{V}$的标准正交基$\{\boldsymbol{e}_i\}$. 在这个基下，对每个 $\mathscr{W}_i(i=1,\cdots,r)$ 分别应用定理10.12的证明中的(18)式就得(20).

10.14 定理 3维定向内积空间$\mathscr{V}$的正交仿射量$\boldsymbol{Q}$实现$\mathscr{V}$的有限转动($\det\boldsymbol{Q}=+1$)或转动带镜面反射($\det\boldsymbol{Q}=-1$). 存在标准正交基$\{\boldsymbol{e}_i\}$，使$\boldsymbol{Q}$的分量矩阵为

$$[Q_{ij}]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{III}\end{bmatrix},\quad -\pi<\theta\leqslant\pi, \qquad (25)$$

其中

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(I(\boldsymbol{Q})-\mathrm{III}),\quad \sin\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{I}(\boldsymbol{PQ})-\mathrm{III}), \qquad (26)$$

$\boldsymbol{P}$ 的分量矩阵为

$$[P_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad (27)$$

它实现$\mathscr{V}$绕$\boldsymbol{Q}$的转轴转过$\frac{\pi}{2}$角.

证明 $f(\lambda)$至少有一个实根λ_3. 如果λ_3是唯一的实根，则应用定理10.13，在$\boldsymbol{e}_3$属于λ_3的标准正交基$\{\boldsymbol{e}_i\}$下,我们有

$$[Q_{ij}]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}, \qquad (28)$$

和特征多项式(5.26):

$$f(\lambda)=(\lambda^2-2\cos\theta\lambda+1)(\lambda-\lambda_3). \qquad (29)$$

由此即得

$$\lambda_3=\mathrm{III}=\det\boldsymbol{Q} \qquad (30)$$

及(25)，但对$0<|\theta|<\pi$. 考虑到(25)和(27)，以及

$$[P_{ik}Q_{kj}]=\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{III}\end{bmatrix},$$

就得(26).

$f(\lambda)$有三个实根的情形又分为:

(i) $\lambda=+1$ 或 -1(三重). 相应地$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$或$-\boldsymbol{I}$, 可看作是(25)当 $\mathrm{III}=1$, $\theta\to 0$ 或 $\mathrm{III}=-1$, $\theta\to\pi$ 的极限情形.

(ii) $\lambda_{1,2}=+1$, $\lambda_3=-1$. 这时$\boldsymbol{Q}|_{\mathscr{V}_+}=\boldsymbol{I}|_{\mathscr{V}_+}$, 而$\boldsymbol{Q}|_{\mathscr{V}_-}$实现沿$\boldsymbol{e}_3$方向的反射. 总起来，$\boldsymbol{Q}$实现$\mathscr{V}$关于$\boldsymbol{e}_1$-$\boldsymbol{e}_2$平面的镜面反射，我们有

$$[Q_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix},$$

可看作是(25)当 $\mathrm{III}=-1$, $\theta\to 0$ 的极限情形.

(iii) $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=+1$. $\boldsymbol{Q}$实现$\mathscr{V}$绕$\boldsymbol{e}_3$转动π. 我们有

$$[Q_{ij}]=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{bmatrix},$$

可看作是(25)当 $\mathrm{III}=1$, $\theta\to\pi$ 的极限情形.

总结起来，公式(25)包括了一切情形，θ的取值范围是$-\pi<\theta\leqslant\pi$.

10.15 定理 任何三维正交仿射量$\boldsymbol{Q}$有**向量表示**

$$\boldsymbol{Q}=\cos\theta\boldsymbol{I}+(\mathrm{III}-\cos\theta)\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}-\sin\theta\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{r}, \tag{31}$$

其中θ由(26)式给出，而

$$\boldsymbol{r}=-\frac{\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{Q}}{2\sin\theta},\quad 0<|\theta|<\pi \tag{32}$$

是属于特征值 $\lambda=\mathrm{III}$ 的单位特征向量，称为$\boldsymbol{Q}$所实现的有限转动的**轴向量**. 当 $\theta=0,\pi$ 时，$\boldsymbol{Q}$退化为对称仿射量，$\boldsymbol{r}$无需给出或需单独给出.

证明 记 Q 的属于 $\lambda = \mathrm{III}$ 的单位特征向量为 $r = e_3$. 任何 $u \in \mathscr{V}$ 可分解为平行于和垂直于 r 的两部分:

$$u = u_{\parallel} + u_{\perp}, \tag{33}$$

其中

$$u_{\parallel} = (ur)r = (r \otimes r)u, \tag{34}$$

$$u_{\perp} = u - u_{\parallel} = (I - r \otimes r)u. \tag{35}$$

考虑到

$$Qu_{\parallel} = \mathrm{III}u_{\parallel}, \tag{36}$$

$$Qu_{\perp} = \cos\theta u_{\perp} + \sin\theta r \times u_{\perp}((\mathrm{span}\{u_{\parallel}\})^{\perp} Q\text{-不变}), \tag{37}$$

我们有

$$\begin{aligned} Qu &= \mathrm{III}(r \otimes r)u + \cos\theta(I - r \otimes r)u + \sin\theta r \times u \\ &= [\cos\theta I + (\mathrm{III} - \cos\theta) r \otimes r - \sin\theta \in r]u. \end{aligned}$$

由 u 的任意性,上式给出 (31). 只要考虑到

$$\begin{aligned} \in : \in &= (\varepsilon_{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k) : (\varepsilon_{rst} e_r \otimes e_s \otimes e_t) \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst}(e_j e_r)(e_k e_s) e_i \otimes e_t = \varepsilon_{irs}\varepsilon_{rsj} e_i \otimes e_j \\ &= 2\delta_{ij} e_i \otimes e_j = 2I, \end{aligned} \tag{38}$$

用 $\in$ 双点乘 (31), 就得 (32).

10.16 定理 任何三维正交仿射量 Q 有反称张量表示

$$Q = \mathrm{III}I + \sin\theta L + (\mathrm{III} - \cos\theta) L^2, \tag{39}$$

其中

$$L = \frac{Q - Q^*}{2\sin\theta}, \quad 0 < |\theta| < \pi, \tag{40}$$

θ 由(26)式给出.

证明 引进轴向量 r 的反偶:

$$L := -\in r, \quad r = -\frac{1}{2} \in : L, \tag{41}$$

并考虑到

$$L^2 = r \in \in r = r \otimes r - I, \tag{42}$$

从 (31) 就可得出 (39). (40) 可直接用 (39) 验证.

10.17 定理 对 n 维内积空间 $\mathscr{V}$ 的任何两个满足条件 (r 可

为任意正整数):

$$\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j,\quad i,j=1,\cdots,r \tag{43}$$

的向量组 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$, 存在正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_i,\quad i=1,\cdots,r. \tag{44}$$

如果 $p=\dim(\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\})=n$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 是唯一的.

证明 我们进行构造性证明. 显然 $p\leqslant n$, $p\leqslant r$. 通过调整向量的编号,可以使得 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\cdots\boldsymbol{u}_p\}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\}$, 从而有[1)]

$$\det[\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j]_{p\times p}\neq 0 \tag{45}$$

和

$$\boldsymbol{u}_i=\sum_{k=1}^{p}\mu_i^k\boldsymbol{u}_k,\quad i=p+1,\cdots,r. \tag{46}$$

注意到(43)和(45), 子集 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}\subset\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$ 也是线性无关的. 因此, $\dim(\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\})=p$, 并且

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{k=1}^{p}\alpha_i^k\boldsymbol{v}_k,\quad i=p+1,\cdots,r. \tag{47}$$

分别以 $\boldsymbol{u}_j$ 和 $\boldsymbol{v}_j$ $(j<p)$ 点乘(46)和(47), 并考虑到(43),我们有

$$\sum_{k=1}^{p}\mu_i^k\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j=\sum_{k=1}^{p}\alpha_i^k\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_j=\sum_{k=1}^{p}\alpha_i^k\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_j,$$

从而

$$\sum_{k=1}^{p}(\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{u}_k)(\alpha_i^k-\mu_i^k)=0.$$

条件(45)使得 $\alpha_i^k=\mu_i^k$, $k=1,\cdots,p$, $i=p+1,\cdots,r$. 于是

---

1) 将(II.2.3)的左式点乘以 $\boldsymbol{u}_j$, $j=1,\cdots,p$,得齐次方程组 $\sum_{j=1}^{p}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j)a^j=0$, $i=1,\cdots,p$. 式(45)就是该方程组只有平凡解,即 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_p\}$ 为线性无关组,的充要条件.

$$v_i = \sum_{k=1}^{p} \mu_i^k v_k, \quad i = p+1, \cdots, r. \tag{48}$$

把线性无关组 $\{u_1, \cdots, u_p\}$ 看成 $\mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_p\}$ 的协变基，求其对偶基 $\{u^1, \cdots, u^p\}$，满足

$$u^i u_j = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \cdots, p. \tag{49}$$

在 $(\mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_p\})^{\perp}$ 和 $(\mathrm{span}\{v_1, \cdots v_p\})^{\perp}$ 各取标正基:

$$\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}, \quad \{f_{p+1}, \cdots, f_n\}. \tag{50}$$

我们断言，下面定义的仿射量

$$Q = \sum_{i=1}^{p} v_i \otimes u^i + \sum_{i=p+1}^{n} f_i \otimes e_i \tag{51}$$

满足(44)，并且是正交的．事实上，$\forall i \leqslant p$，我们有

$$Qu_i = \sum_{j=1}^{p} (v_j \otimes u^j) u_i + \sum_{j=p+1}^{n} (f_j \otimes e_j) u_i = \sum_{j=1}^{p} \delta^j_i v_j = v_i,$$

而 $\forall i > p$，利用(46)和(48)，则有

$$Qu_i = \sum_{j=1}^{p} (v_j \otimes u^j) \sum_{k=1}^{p} \mu_i^k u_k = \sum_{j=1}^{p} \mu_i^j v_j = v_i.$$

对于 Q 的正交性,只要验证条件(3)．

$$\begin{aligned} Q^* Q &= \left(\sum_{i=1}^{p} u^i \otimes v_i + \sum_{i=p+1}^{n} e_i \otimes f_i \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{j=1}^{p} v_j \otimes u^j + \sum_{j=p+1}^{n} f_j \otimes e_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{p} (u_i u_j) u^i \otimes u^j + \sum_{i=p+1}^{n} e_i \otimes e_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} u_i \otimes u^i + \sum_{i=p+1}^{n} e_i \otimes e_i = I. \end{aligned}$$

由于标准正交基(50)是任意选取的，从 Q 的表达式(51)可以看到,除了情形 $p = n$，Q 并不唯一．

§11 仿射量的主向

11.1 定义 对于仿射量 T，如果正交向量组 $\{a_i\}$ 的象 $\{Ta_i\}$

也是正交组，则 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 所代表的方向称为 $\boldsymbol{T}$ 的**主向**（这是在右点乘意义下定义的。当然也可以在左点乘意义下定义）。

11.2 定理 任何仿射量 $\boldsymbol{T}$ 有主向。

证明 考虑对称仿射量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$。根据定理 8.5，$\boldsymbol{S}$ 有一组构成标准正交基的特征向量组 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 满足

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i \quad (\text{不求和}). \tag{1}$$

$\{\boldsymbol{e}_i\}$ 就是 $\boldsymbol{T}$ 的主向，因 $\forall i\neq j$

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_j=\lambda_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=0 \qquad \square$$

显然，有如下推论：

11.3 推论 对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的特征方向同时是主向。

§12 仿射量的分解

12.1 定理（加法分解） 任何仿射量 $\boldsymbol{T}$ 可唯一地分解为对称和反称部分之和：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}, \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{S}:=\mathscr{S}\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^*),\quad S_{ij}=T_{(ij)}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}:=\mathscr{A}\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^*),\quad A_{ij}=T_{[ij]}. \tag{3}$$

证明 只需证唯一性。设另有一个分解 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}'+\boldsymbol{A}'$，则和 (1) 比较，得

$$\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}. \tag{4}$$

将 (4) 式对称化

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}')=\mathscr{S}(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}),$$

得

$$\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'^*-\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{O}.$$

从而 $\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{S}$。代回 (4)，又得 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$。唯一性得证。

12.2 定理 任何对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 可唯一地分解为偏量和球量部分之和:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{K}, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\frac{1}{n}(\mathrm{tr}\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{S}-\frac{1}{n}(\mathrm{tr}\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}. \tag{7}$$

证明 (6)式的 $\boldsymbol{K}$ 显然是**球量**(参阅定义 8.9)。(7)式的 $\boldsymbol{D}$ 是偏量也易验证,因 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{I}=n$ 和

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=\mathrm{tr}\boldsymbol{S}-\frac{1}{n}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S})(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{I})=0.$$

为了证唯一性,设另有一个分解 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}'+\boldsymbol{K}'$. 和(5)比较,有

$$\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{K}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}'.$$

取上式的迹,并考虑到 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}'=0$, 得

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}'=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}. \tag{8}$$

根据定义 8.9, 两球量可表示为 $\boldsymbol{K}=x\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{K}'=x'\boldsymbol{I}$. (8)式导致 $x=x'$, 从而 $\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{K}$, 进而有 $\boldsymbol{D}'=\boldsymbol{D}$.

12.3 引理(平方根定理) 设 $\boldsymbol{S}$ 是正定对称张量,则存在唯一的正定对称张量 $\boldsymbol{U}$, 使得 $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{S}$. 记 $\boldsymbol{U}$ 为 $\sqrt{\boldsymbol{S}}$.

证明 (存在性)设 $\boldsymbol{S}\in P\mathrm{sym}$ 有谱表示 $\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i$, $\lambda_i>0$. 定义 $\boldsymbol{U}\in P\mathrm{sym}$ 为 $\boldsymbol{U}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i$, 它满足 $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{S}$.

(唯一性)设 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}\in P\mathrm{sym}$ 均满足 $\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{S}$. 设 $\boldsymbol{e}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 对应于特征值 λ 的特征向量,则

$$\boldsymbol{o}=(\boldsymbol{U}^2-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{U}+\sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{I})(\boldsymbol{U}-\sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}.$$

记 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{U}-\sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}$, 则上式变成 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}=-\sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{u}$. 若 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}$, 则 $-\sqrt{\lambda}<0$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的特征值,这与 $\boldsymbol{U}\in P\mathrm{sym}$ 矛盾. 因此, $\boldsymbol{u}$

只能是零向量，即得 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}=\sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{e}$. 同理，可得 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{e}=\sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{e}$. 于是，对 $\boldsymbol{S}$ 的任意特征向量 $\boldsymbol{e}$，有 $(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V})\boldsymbol{e}=\boldsymbol{o}$，从而 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}$.

12.4 定理(乘法分解，极分解) 任何正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 可唯一地分解为正定对称仿射量和正交仿射量或正交仿射量和正定对称仿射量的积(分别称为左、右乘法分解)：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}. \tag{9}$$

证明 因为 $\boldsymbol{T}^*$ 和 $\boldsymbol{T}$ 同时正则，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}\Longrightarrow\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}$ 和 $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}$，于是 $\forall\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o}$，

$$(\boldsymbol{T}\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T})\boldsymbol{u}>0,$$

$$(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*)\boldsymbol{u}>0.$$

故对称仿射量 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$ 和 $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$ 都是正定对称仿射量，根据引理 12.3，有唯一的平方根：

$$\boldsymbol{V}:=(\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{U}:=(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T})^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

它们亦均为正定对称. 先证 $(9)_1$. 如果能证明

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{T} \tag{12}$$

是正交仿射量，左分解的存在性就得证. 可从

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{V}^{-1}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{V}^2\boldsymbol{V}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

看出这一点. 现设另有一左分解，则从 $\tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}$ 得

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{V}^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{Q}}. \tag{13}$$

取 (13) 的转置 $\boldsymbol{Q}^*=\tilde{\boldsymbol{Q}}^*\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}^{-1}$，再求其逆

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Q}}. \tag{14}$$

比较 (13)，(14)，得

$$(\boldsymbol{V}^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}-\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1})\tilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{O}.$$

两边右点乘 $\tilde{\boldsymbol{Q}}^*$，得 $\boldsymbol{V}^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{V}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}$，即 $\boldsymbol{V}^2=\tilde{\boldsymbol{V}}^2$，因此 $\tilde{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{V}$. 代回 (13) 式，又得 $\tilde{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{Q}$. 左分解的唯一性证毕. 同法可证右分解的存在与唯一.

暂设左右分解中的正交仿射量不同：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{V}\boldsymbol{Q}). \tag{15}$$

由于右端括弧内所代表的仿射量满足

$$(Q^*VQ)^* = Q^*VQ,$$

因而是对称仿射量．由于它左边点乘的是正交仿射量 Q，则根据分解的唯一性，这就是右分解．于是

$$U = Q^*VQ, Q' = Q.$$

(9) 式证毕．

第IV章　张量函数及分析

§1　各向同性张量函数

在自然科学中，一种物理状态经常由一个某阶的张量来刻划，而这个状态的变化又依赖于另一个或若干个物理状态的变化。这就是近年盛行起来的"**本构关系**"。例如经典弹性理论的"应力和应变成比例"是指描述应力状态的应力张量是描述应变状态的应变张量的线性函数。而牛顿流体的本构关系则是"应力张量是变形率张量的线性函数"。对于粘弹性体，应力张量却是应变张量和变形率张量的函数。这些例子所提到的张量都是二阶张量，即仿射量。随着物体模型的复杂化，应力张量所依赖的张量的个数就增多。因此，只有把张量函数及其变化率的讨论包括进去，张量分析才成为一门完整的，用以研究自然科学的应用工具。

1.1 定义　**张量函数**是从若干个张量空间的笛氏积到张量空间的映射的统称．所涉及的张量空间可以是 $\mathrm{R}, \mathscr{V}, \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$ 等．□

例如：

$$\varphi: \underbrace{\mathscr{V} \times \cdots \times \mathscr{V}}_{r\text{ 次}} \to \mathrm{R}: (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) \longmapsto \varphi(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{f}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}: \boldsymbol{u} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}), \quad (2)$$

$$W: \mathscr{T}_2(\mathscr{V}) \to \mathrm{R}: \boldsymbol{T} \longmapsto W(\boldsymbol{T}), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{F}: \mathscr{T}_2(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_2(\mathscr{V}): \boldsymbol{T} \longmapsto \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}), \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\Phi}: \mathscr{T}_2(\mathscr{V}) \times \mathscr{T}_2(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_2(\mathscr{V}): (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \longmapsto \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}). \quad (5)$$

正如意大利著名数学家 A. Signorini (Questioni di elasticità non linearizata, Rend. Mat. Appl. Roma, 1-2, **19**(1960), 1—71) 指出，确定物理现象的本构关系(即相应的张量函数形式)是"真正数学物理的最困难问题 (difficilissimo problema di vera fisica ma-

tematica)”. 确实，对一般的张量函数进行讨论是困难的，而且不易得出能用以解决问题的结论. 但另一方面，物体或多或少总有一些对称性. 把这些对称性作为限制张量函数形式的附加条件，我们就有可能将问题的解决向前推进一步. 称为各向同性体的对称性最丰富，附加的条件也就最强. 所谓**各向同性**是指材料在各个方向的性质相同. 举例来说，把一块金属材料沿某方向切割成试件进行拉伸试验，其结果和沿任何其他方向切割时的结果相同. 试验结果是指试件的受力-伸长曲线. 沿另一个方向切割成试件进行拉伸，实质上是将在第一次实验方向上的外力相对该金属块转动某一个角度. 所谓结果相同，是指该金属块在此方向上的伸长率相当于在第一次试验方向上的伸长率转动了同一角度. 用张量的语言来说："张量函数自变量转动一个角度后的函数值等于在原自变量下函数值转过相同的角度". 我们知道，在 $n=3$ 时，转动一个向量 $\boldsymbol{u}$ 就是用一个正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 作用于它而得 $\overset{\frown}{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{Qu}$. 我们把这个概念推广至 n 维情形. 那么，转动一个仿射量是什么意思呢? 我们只能从仿射量可以实现线性变换这个角度来定义它的转动. 设有仿射量 $\boldsymbol{T}$，则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Tu}$. 我们这样来定义：转动后的仿射量作用于转动后的原象给出转动后的象，即

$$\overset{\frown}{\boldsymbol{v}}=\overset{\frown}{\boldsymbol{T}}\overset{\frown}{\boldsymbol{u}}. \tag{6}$$

另一方面，

$$\overset{\frown}{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{Qv}=\boldsymbol{QTu}=\boldsymbol{QTQ}^*\boldsymbol{Qu}=(\boldsymbol{QTQ}^*)\overset{\frown}{\boldsymbol{u}}. \tag{7}$$

比较 (6), (7) 两式，由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性，就有

$$\overset{\frown}{\boldsymbol{T}}:=\boldsymbol{QTQ}^*. \tag{8}$$

1.2 定义 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 称为**各向同性的**，如果转动对它不起作用：

$$\boldsymbol{QTQ}^*=\boldsymbol{T},\quad \forall \boldsymbol{Q}\in \mathrm{Orth}. \tag{9}$$

1.3 定理 各向同性仿射量 $\boldsymbol{T}$ 是球仿射量.

证明 由定义 1.2，有

$$\boldsymbol{TQ}=\boldsymbol{QT}.$$

设 λ 和 $\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的特征值和所属的右特征向量，则

$$\boldsymbol{TQr}=\boldsymbol{QTr}=\lambda\boldsymbol{Qr},$$

即

$$(T - \lambda I)Qr = o, \quad \forall Q \in \mathrm{Orth}.$$

由于 Q 的任意性，根据 (III. 1. 20)，$T - \lambda I$ 是零仿射量，即

$$T = \lambda I. \tag{10}$$

根据第 III 章定义 8.9，T 为球仿射量.

1.4 定义 (以例子说明)张量函数 (1—5) 是**各向同性的**，如果满足

$$\varphi(u_1, \cdots, u_r) = \varphi(Qu_1, \cdots, Qu_r), \tag{11}$$

$$Qf(u) = f(Qu), \tag{12}$$

$$W(T) = W(QTQ^*), \tag{13}$$

$$QF(T)Q^* = F(QTQ^*), \tag{14}$$

$$Q\Phi(A, B)Q^* = \Phi(QAQ^*, QBQ^*), \tag{15}$$

$\forall u, u_1, \cdots, u_r \in \mathscr{V}$; $T, A, B \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$; $Q \in \mathrm{Orth}$. □

有了这些例子，就不难对其他类型张量函数下各向同性的定义了. 定义 1.4 是各向同性张量函数的近代定义. 传统方式是按分量定义的. 两种定义方式是等价的，感兴趣的读者可参阅拙著《非线性弹性理论》(科学出版社，1980 年).

1945 年，M.Reiner(A mathematical theory of dilatancy, Amer. J. Math. **67** (1945) 350—362) 利用 Cayley-Hamilton 定理得出一个自变量的各向同性张量函数必然是自变量的二次多项式 (系数是自变量主不变量的函数)的结论 (当 $n = 3$ 时). 虽然他的论证是不完整的，但却在本构理论的研究上起了推动性的先锋作用. 在后面我们将给出这结论的推广(对任意 n) 的严格证明.

例 1. 仿射量 T 的多项式

$$F(T) = \sum_{i=0}^{r} a_i T^i \tag{16}$$

是各向同性张量函数，其中各 a_i 是常数. 如果 $r \geqslant n$，可利用 Cayley-Hamilton 方程将 (16) 化成

$$F(T) = \varphi_0 I + \varphi_1 T + \cdots + \varphi_{n-1} T^{n-1}, \tag{17}$$

其中各 φ_i 是 T 的 n 个主不变量的多项式.

例 2. 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的幂级数

$$e^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I} + \frac{1}{1!}\boldsymbol{T} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{T}^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{T}^n + \cdots \tag{18}$$

是各向同性的。

1.5 定理 (Cauchy 基本表示定理) 自变量为 r 个向量 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 的标量值函数 $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r)$ 是各向同性的，当且仅当它可表达为内积 $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j$, $i, j = 1, \cdots, r$ 的函数。

证明 设 φ 各向同性，即满足 (11)。记

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_i \ (i = 1, \cdots, r), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \text{Orth}, \tag{19}$$

则 (11) 要求，对所有满足 (19) 的向量组 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$,

$$\varphi(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) = \varphi(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) \tag{20}$$

成立. $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ 不同于 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$，但又由 (19) 相联系. 不管 $\boldsymbol{Q}$ 如何变化，由于 $\boldsymbol{Q}$ 保内积，这两向量组内相应两两向量间的内积是不变的:

$$\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j, \quad i, j = 1, \cdots, r. \tag{21}$$

所以，要想(20)，即(11)，成立，这个函数必须通过这些不变的内积来表示. 反过来，如果 φ 可通过这些内积来表达，则 φ 自然就是各向同性的: $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_j) = \hat{\varphi}(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}_j) = \hat{\varphi}((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_j)) = \varphi(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}_r)$.

1.6 推论 自变量为向量 $\boldsymbol{u}$ 的标量值函数 $\varphi(\boldsymbol{u})$ 是各向同性的，当且仅当它可表达为 $|\boldsymbol{u}|$ 的函数.

1.7 定理 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的 n 个主不变量是各向同性函数:

$$I_r(\boldsymbol{T}) = I_r(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^*), \quad r = 1, \cdots, n, \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \text{Orth}. \tag{22}$$

证明 只要将仿射量 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^*$ 的行列式的定义关系式

$$((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^* - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_1) \wedge \cdots \wedge ((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^* - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_n)$$
$$= (\det(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^* - \lambda\boldsymbol{I}))\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n \tag{23}$$

展开，就可得

$$f_{\boldsymbol{QTQ}^*}(\lambda) = \det(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^* - \lambda\boldsymbol{I}), \tag{24}$$

其中 $f_{\boldsymbol{QTQ}^*}(\lambda)$ 是仿射量 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^*$ 的特征多项式. 考虑到

$$\det(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}^* - \lambda\boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}^*)$$

$$= (\det Q)(\det(T - \lambda I))(\det Q^*)$$
$$= \det(T - \lambda I),$$

就得

$$f_T(\lambda) = f_{QTQ^*}(\lambda). \tag{25}$$

从而这两多项式的系数，即主不变量，相等。

1.8 定理 仿射量 T 的各次矩是各向同性函数：

$$\bar{I}_r(T) = \bar{I}_r(QTQ^*),\quad r = 1,\cdots,\ \forall Q \in \mathrm{Orth}. \tag{26}$$

证明 利用矩的定义，即得

$$\bar{I}_r(QTQ^*) = \mathrm{tr}(QTQ^*)^r = \mathrm{tr}(QTQ^*QTQ^*\cdots QTQ^*)$$
$$= \mathrm{tr}(QT^rQ^*) = \mathrm{tr}(T^rQ^*Q) = \mathrm{tr}T^r = \bar{I}_r(T).$$

1.9 推论 仿射量 T 的各主不变量的标量值函数 $\varphi(I_1,\cdots,I_n)$ 是 T 的各向同性函数。

证明 显然，因为

$$\varphi(I_1(T),\cdots,I_n(T)) = \varphi(I_1(QTQ^*),\cdots,I_n(QTQ^*)),$$
$$\forall Q \in \mathrm{Orth}.$$

§2 对称仿射量的各向同性标量值函数

2.1 定理(表示定理) 自变量是对称仿射量 S 的标量值函数 $W(S)$ 是各向同性的，当且仅当它可表示为 S 的 n 个主不变量的函数[1]：

$$W(S) = W(I_1(S),\cdots,I_n(S)). \tag{1}$$

证明 设 $W(S)$ 各向同性，即满足

$$W(S) = W(QSQ^*),\quad \forall Q \in \mathrm{Orth}. \tag{2}$$

S 在主基 $\{e_i\}$ 有谱表示

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \otimes e_i. \tag{3}$$

将 Q 右点乘下列各式

1）下式左右两端是两个形式不同的函数，但用同一符号表示有方便之处。今后也将这样做。

$$Se_i = \lambda_i e_i,\ (\text{不求和})\ i = 1, \cdots, n, \tag{4}$$

得

$$(QSQ^*)(Qe_i) = \lambda_i(Qe_i),\ i = 1, \cdots, n. \tag{5}$$

这说明 QSQ^* 有相同于 S 的特征值，而主基则是 $\{Qe_i\}$。于是 QSQ^* 的谱表示是

$$QSQ^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Qe_i)\otimes(Qe_i). \tag{6}$$

在一个具体基里，$W(S)$ 是 S 各分量的函数，而在主基里则是各特征值 λ_i 的函数。同理，$W(QSQ^*)$ 在 QSQ^* 的主基里也是各 λ_i 的函数。各向同性条件 (2) 允许两端采用不同的基，自然可分别用各自的主基，这时两端都是相等的 λ_i 的函数，而且不管 S 和 Q 如何变化，两端的函数值总相等，因此两端必须是 λ_i 的同一个函数：

$$W(S) = \bar{W}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = W(QSQ^*). \tag{7}$$

考虑到各主值 λ_i 又是各主不变量 I_r 的函数，因此就必然有

$$W(S) = W(I_1(S), \cdots, I_n(S)). \tag{8}$$

反之，若 $W(S)$ 可表达为 (8) 形式，则根据推论 1.9，必然满足

$$W(S) = W(I_1(S), \cdots, I_n(S)) = W(I_1(QSQ^*), \cdots, I_n(QSQ^*)) = W(QSQ^*),\ \forall Q \in \text{Orth}.$$ □

既然 I_r 可由前 r 个矩来表达，则也就有

$$W(S) = W(\bar{I}_1(S), \cdots, \bar{I}_n(S)). \tag{9}$$

如果各向同性标量值函数有两个对称自变量：$W(B, C) = W(QBQ^*, QCQ^*)$，则它表达为不仅是 B 和 C 的各主不变量，而且还是 B 和 C 的共同不变量的函数。对于 $n = 3$，文献上证明，$W(B, C)$ 可表达为下列 10 个不变量的函数：

$$\left.\begin{array}{l}\text{tr}B,\ \text{tr}B^2,\ \text{tr}B^3,\ \text{tr}C,\ \text{tr}C^2,\ \text{tr}C^3, \\ \text{tr}(BC),\ \text{tr}(B^2C),\ \text{tr}(BC^2),\ \text{tr}(B^2C^2).\end{array}\right\} \tag{10}$$

§3 对称仿射量的各向同性仿射量值函数

3.1 引理 (Transfer theorem) 设映射

$$F:\mathscr{T}_2(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_2(\mathscr{V}):T\longmapsto F(T) \tag{1}$$

是各向同性的，则 $\boldsymbol{T}$ 的特征方向同时是 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 的特征方向。

证明 设 $\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的(单位)特征向量(左，右特征方向相同)：

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{T}=\lambda\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

引进一个特殊的正交仿射量

$$\boldsymbol{R}:=-\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}.\quad(\text{易证 }(\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{R}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) \tag{3}$$

这个 $\boldsymbol{R}$ 在以 $\boldsymbol{r}$ 为最后基向量的标准正交基上的分量矩阵为

$$[R_{ij}]=\begin{bmatrix}-1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & +1\end{bmatrix}.$$

它的属于 $\lambda=+1$ 的特征子空间 $\mathscr{V}(+1)$ 是一维的，由唯一的(可差一符号)单位特征向量 $\boldsymbol{r}$ 所张成：

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}. \tag{4}$$

将 $\boldsymbol{R}$ 代入各向同性条件 (1.14)，并考虑到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}^*&=(-\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\\&=\boldsymbol{T}-2\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}\boldsymbol{T}-2\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}+4\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}\\&=\boldsymbol{T},\end{aligned}$$

我们有

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\quad\text{即}\quad\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{R}.$$

于是

$$\boldsymbol{R}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r},$$

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})]\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}).$$

这说明 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 分别是 $\boldsymbol{R}$ 属于 $\lambda=+1$ 的右和左特征向量(一般不是单位向量)，即均属于 $\mathscr{V}(+1)$. 因此 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 都可由 $\boldsymbol{r}$ 线性表出：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r}=\xi_r\boldsymbol{r},\quad\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})=\xi_l\boldsymbol{r}. \tag{5}$$

以 $\boldsymbol{r}$ 点乘上两式，得

$$\xi_l=\boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r}=\xi_r\equiv\xi,$$

于是 (5) 就变成

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{r}=\xi\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})=\xi\boldsymbol{r}. \tag{6}$$

这说明 $\boldsymbol{r}$ 也是 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 的特征方向。

3.2 推论 各向同性映射 $\boldsymbol{F}:\mathrm{Sym}\to\mathscr{T}_2(\mathscr{V}):\boldsymbol{S}\longmapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})$ 的值域是 Sym。

证明 对称自变量 $\boldsymbol{S}$ 有 n 个特征值，对应有一组正交的特征方向. 根据引理 3.1，这组方向也是 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})$ 的特征方向，因而有谱表示. 根据第 III 章定理 8.6，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})$ 是对称仿射量。

3.3 定理（表示定理） 自变量是对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的仿射量值函数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ 是各向同性的，当且仅当它可表示为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})=\varphi_0\boldsymbol{I}+\varphi_1\boldsymbol{S}+\cdots+\varphi_{n-1}\boldsymbol{S}^{n-1}, \tag{7}$$

其中 $\varphi_0,\cdots,\varphi_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的 n 个主不变量（或前 n 个矩）的标量值函数。

证明 根据引理 3.1 和推论 3.2，对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ 有相同的主基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$. 设 $\boldsymbol{S}$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ 相应的特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$. 在基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 上，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ 变成

$$\mu_i=\mu_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_n). \tag{8}$$

如果 $\boldsymbol{S}$ 的各特征值不相同，则下列方程组

$$\mu_i=\varphi_0+\varphi_1\lambda_i+\cdots+\varphi_{n-1}\lambda_i^{n-1}\quad(i=1,\cdots,n) \tag{9}$$

有唯一解 $\varphi_0,\cdots,\varphi_{n-1}$，因它的系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\cdots\lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2\cdots\lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \\ 1 & \lambda_n\cdots\lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

是 van der Monde 行列式，用归纳法可以证明

$$\Delta=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0 \tag{10}$$

解出的各 φ_i 依赖于各 λ_i 和 μ_i. 用 (8) 消去 μ_i，就得 $\varphi_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$i=0,1,\cdots,n-1$. 由于各 λ_i 又是 $\boldsymbol{S}$ 的 n 个主不变量的函数，最终我们有 $\varphi_i(I_1,\cdots,I_n)$，$i=0,1,\cdots,n-1$. 用 (9) 构造谱表示，得

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_0 + \varphi_1\lambda_i + \cdots + \varphi_{n-1}\lambda_i^{n-1}) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i,$$

此即 (7)。

如果 $\boldsymbol{S}$ 有两个相同特征值,譬如 $\lambda_{n-1} = \lambda_n$, 则 (8) 变成

$$\mu_i = \mu_i(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}), \tag{11}$$

并且

$$\mu_i = \varphi_0 + \varphi_1\lambda_i + \cdots + \varphi_{n-2}\lambda_i^{n-2} \quad (i = 1, \cdots, n-1) \tag{12}$$

有唯一解 $\varphi_0(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}), \cdots, \varphi_{n-2}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1})$, 即 $\varphi_0(I_1, \cdots, I_n), \cdots, \varphi_{n-2}(I_1, \cdots, I_n)$。取 $\mu_n = \mu_{n-1}$, 并构造谱表示,就得类似于 (7) 的表示式

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}) = \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{S} + \cdots + \varphi_{n-2}\boldsymbol{S}^{n-2}. \tag{13}$$

若 $\boldsymbol{S}$ 有 r 个不同的重根,可类似地得

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}) = \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{S} + \cdots + \varphi_{r-1}\boldsymbol{S}^{r-1}. \tag{14}$$

这时 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ 也相应地有 r 个不同的重特征值,而且对应于重特征值的特征子空间也和 $\boldsymbol{S}$ 的相同。

另一方面,任何具有形式 (7) 的张量函数是各向同性的,因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{QSQ}^*) &= \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{QSQ}^* + \cdots + \varphi_{n-1}(\boldsymbol{QSQ}^*)^{n-1}\\ &= \boldsymbol{Q}(\varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_1\boldsymbol{S} + \cdots + \varphi_{n-1}\boldsymbol{S}^{n-1})\boldsymbol{Q}^*\\ &= \boldsymbol{QT}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{Q}^*. \qquad \square\end{aligned}$$

显然,在 (III.8.23) 定义的张量函数是各向同性的,但任意的各向同性张量函数 (7) 一不定可表示为 (III.8.23) 的形式。 □

下面我们对于 $\boldsymbol{S}$ 各特征值不相同的情形(其余情形读者自证)给出定理 3.3 的另一个证法。为此需要

3.4 引理 设 $\boldsymbol{S} \in \mathrm{Sym}$ 有谱表示

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \qquad (\text{各 } \lambda_i \text{ 不相同}), \tag{15}$$

则集合 $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{S}, \cdots, \boldsymbol{S}^{n-1}\}$ 线性无关,且

$$\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{S}, \cdots, \boldsymbol{S}^{n-1}\} = \mathrm{span}\,\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i\}. \tag{16}$$

证明 证 $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{S}, \cdots, \boldsymbol{S}^{n-1}\}$ 线性无关等价于证

$$\mu_j \boldsymbol{S}^{j-1} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \mu_j = 0. \tag{17}$$

为此将 (17) 左式作用于各特征向量 e_i，得

$$o = \mu_j S^{j-1} e_i = \mu_j \lambda_i^{j-1}. \tag{18}$$

这个线性方程组的系数行列式就是定理 3.3 证明中的 van der Monde 行列式 $\triangle \neq 0$. 由此得 (17) 的右式，从而 $\{I, S, \cdots, S^{n-1}\}$ 线性无关. 子空间 $\operatorname{span}\{e_i \otimes e_i\} \subset \mathrm{Sym}$ 是具有和 S 相同主方向的对称仿射量的全体，其维数为 n. 由于 n 个仿射量 $I, S, \cdots, S^{n-1} \in \operatorname{span}\{e_i \otimes e_i\}$，而且构成线性无关组，因此它们就张成这个子空间，即得 (16).

定理 3.3 的另一证明 只需证必要性. 设 $S \in \mathrm{Sym}$ 有谱表示 (15). 根据引理 3.1，$T(S)$ 有谱表示

$$T(S) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i e_i \otimes e_i \in \operatorname{span}\{e_i \otimes e_i\}.$$

根据引理 3.4，存在标量函数 $\varphi_0(S), \varphi_1(S), \cdots, \varphi_{n-1}(S)$，使得

$$T(S) = \varphi_0(S) I + \varphi_1(S) S + \cdots + \varphi_{n-1}(S) S^{n-1}. \tag{19}$$

按假设，$T(S)$ 各向同性:

$$QT(S)Q^* = T(QSQ^*), \quad \forall Q \in \mathrm{Orth},$$

即

$$T(S) - Q^* T(QSQ^*) Q = O. \tag{20}$$

将 (19) 代入 (20)，并考虑到

$$Q^*(QSQ^*)^r Q = Q^*(QSQ^*) \cdots (QSQ^*) Q = S^r,$$
$$r = 1, \cdots, n-1,$$

得

$$[\varphi_0(S) - \varphi_0(QSQ^*)] I + [\varphi_1(S) - \varphi_1(QSQ^*)] S + \cdots +$$
$$[\varphi_{n-1}(S) - \varphi_{n-1}(QSQ^*)] S^{n-1} = O, \quad \forall Q \in \mathrm{Orth}.$$

根据引理 3.4，$\{I, S, \cdots, S^{n-1}\}$ 线性无关，上式各系数为零:

$$\varphi_i(S) = \varphi_i(QSQ^*), \quad \forall i = 0, 1, \cdots, n-1;$$
$$Q \in \mathrm{Orth}. \tag{21}$$

这说明，标量函数 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ 是各向同性的. 根据定理 2.1，它们可表为 S 的 n 个主不变量的函数，从而得 (7). □

当 $n = 3$ 时，可以证明以下定理，

3.5 定理 两个对称仿射量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的各向同性仿射量值函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) = \phi_0\boldsymbol{I} + \phi_1\boldsymbol{B} + \phi_2\boldsymbol{C} + \phi_3\boldsymbol{B}^2 + \phi_4\boldsymbol{C}^2 + \phi_5(\boldsymbol{BC} \\ + \boldsymbol{CB}) + \phi_6(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{C} + \boldsymbol{CB}^2) + \phi_7(\boldsymbol{BC}^2 \\ + \boldsymbol{C}^2\boldsymbol{B}) + \phi_8(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{C}^2 + \boldsymbol{C}^2\boldsymbol{B}^2),\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_8$ 是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的 10 个共同不变量 (2.10) 的标量值函数。

§4 仿射量的线性各向同性标量值函数

由于内积的线性性质，向量 $\boldsymbol{v}$ 的线性函数

$$\mathscr{V} \to \mathrm{R}: \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{uv}$$

可以由向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的内积实现. 类似地，仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的线性函数

$$\mathscr{T}_2(\mathscr{V}) \to \mathrm{R}: \boldsymbol{T} \longmapsto \boldsymbol{L}:\boldsymbol{T} \tag{1}$$

可由仿射量 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的双点乘实现.

4.1 定理 自变量是仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的线性标量值函数 $W(\boldsymbol{T})$ 是各向同性的，当且仅当它是 $\boldsymbol{T}$ 的迹的倍数:

$$W(\boldsymbol{T}) = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{T}, \tag{2}$$

其中 λ 是常数.

证明 根据 (1)，我们有表示

$$W(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{L}:\boldsymbol{T}. \tag{3}$$

问题归结为利用各向同性条件 (1.3)

$$W(\boldsymbol{T}) = W(\boldsymbol{QTQ}^*), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathrm{Orth} \tag{4}$$

求 $\boldsymbol{L}$. 将 (3) 代入，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}:\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{L}:(\boldsymbol{QTQ}^*) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{L}^*(\boldsymbol{QTQ}^*)) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{QT}) \\ &= \operatorname{tr}((\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{LQ})^*\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{LQ}):\boldsymbol{T}.\end{aligned}$$

根据 (III.9.10)，由 $\boldsymbol{T}$ 的任意性，得 $\boldsymbol{L}$ 是各向同性张量(定义 1.2):

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{LQ}.$$

根据定理 1.3，有

$$\boldsymbol{L} = \lambda \boldsymbol{I}. \tag{5}$$

将 (5) 代入 (3)，利用 (III.5.14)，得

$$W(\boldsymbol{T}) = \lambda \boldsymbol{I}:\boldsymbol{T} = \lambda \mathrm{tr}\boldsymbol{T}.$$

4.2 推论 (i) $W(\boldsymbol{T})$ 只依赖于 $\boldsymbol{T}$ 的对称部分. (ii) 反称仿射量 $\boldsymbol{A}$ 的线性各向同性标量值函数恒为零.

证明 只需考虑到加法分解 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}$，(III.5.15) 和 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = 0$(III.9.2) 即可

§5 对称仿射量的线性各向同性仿射量值函数

5.1 定理 对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的线性仿射量值函数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ 是各向同性的，当且仅当它可表示为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}) = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{S})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{S}, \quad \forall \boldsymbol{S} \in \mathrm{Sym}, \tag{1}$$

其中 λ 和 μ 是常数.

证明

证法一 从一般表示式 (3.3) 舍去明显的非线性项，得

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S}) = \varphi_0 \boldsymbol{I} + \varphi_1 \boldsymbol{S}. \tag{2}$$

要 (2) 成为线性函数，只需取 φ_0 为 $\boldsymbol{S}$ 的线性标量值函数 (4.2) 和取 φ_1 为常数 2μ，即得 (1).

证法二 不利用一般表示式 (3.3). 先考虑一种特殊的自变量 $\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e} \in \mathrm{Sym}$ ($\boldsymbol{e}$ 单位向量). $\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}$ 有特征值 1 和 $(n-1)$ 重特征值 0，对应的特征子空间分别是 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}\}$ 和 $(\mathrm{Span}\{\boldsymbol{e}\})^{\perp}$. 根据引理 3.1，它们也是 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})$ 的特征子空间. 设对应的特征值为 ν 和 λ. 则取以 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_n$ 的标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})$ 就有谱表示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}) &= \lambda\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i + \nu\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{I} + (\nu-\lambda)\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e} \\ &= \lambda(\boldsymbol{e})\boldsymbol{I} + 2\mu(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e},\end{aligned} \tag{3}$$

其中 λ, μ 可能依赖于 $\boldsymbol{e}$. 应用各向同性条件于 (3)，并记 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}$，得

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{f})\boldsymbol{I}+2\mu(\boldsymbol{f})\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{f}&=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{f})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}\boldsymbol{Q}^{*})\\
&=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})\boldsymbol{Q}^{*}=\lambda(\boldsymbol{e})\boldsymbol{I}+2\mu(\boldsymbol{e})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}\boldsymbol{Q}^{*}\\
&=\lambda(\boldsymbol{e})\boldsymbol{I}+2\mu(\boldsymbol{e})\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{f}.
\end{aligned}
$$

比较两端，得

$$[\lambda(\boldsymbol{e})-\lambda(\boldsymbol{f})]\boldsymbol{I}+2[\mu(\boldsymbol{e})-\mu(\boldsymbol{f})]\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{f}=\boldsymbol{O}.$$

$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{f}$ 线性无关，从而各系数为零．根据推论 1.6 及自变量是单位向量，λ 和 μ 只能是常数．于是

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e})=\lambda\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e},\quad \forall\,\text{单位向量}\,\boldsymbol{e}. \tag{4}$$

将 $\boldsymbol{S}$ 的谱表示 (3.15) 代入 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$，得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\lambda\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i)\\
&=\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\boldsymbol{I}+2\mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i.
\end{aligned}
$$

此即 (1).

§6 仿射量的线性各向同性仿射量值函数

6.1 定理 反称仿射量 $\boldsymbol{A}$ 的线性仿射量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})$ 是各向同性的，当且仅当它可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})=2\alpha\boldsymbol{A},\quad \forall\boldsymbol{A}\in\mathrm{Skw}, \tag{1}$$

其中 α 是常数.

证明 先局限于类型为

$$\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u} \tag{2}$$

的反称自变量，其中 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是任意的相互正交单位向量．$\boldsymbol{C}$ 的属于唯一特征值($=0$)的特征子空间是

$$\mathscr{V}(0)=\{\boldsymbol{w}\in\mathscr{V}\mid\boldsymbol{w}\perp\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\},\quad \dim\mathscr{V}(0)=n-2. \tag{3}$$

对于相互正交的单位向量 $\boldsymbol{w}_3,\cdots,\boldsymbol{w}_n\in\mathscr{V}(0)$，我们有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{w}_i\boldsymbol{C}=\boldsymbol{o},\quad i=3,\cdots,n, \tag{4}$$

并且，根据引理 3.1，(对 i 不求和)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})\boldsymbol{w}_i=\xi_i\boldsymbol{w}_i,\quad \boldsymbol{w}_i\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})=\xi_i\boldsymbol{w}_i,\quad i=3,\cdots,n. \tag{5}$$

令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_2$，则 $\{\boldsymbol{w}_i\}$ 构成 $\mathscr{V}$ 的标准正交基，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})$ 可

表为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}) = \xi_{rs}\boldsymbol{w}_r \otimes \boldsymbol{w}_s. \tag{6}$$

一般而言，各 ξ_{ij} 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的函数. 将 (6) 代入 (5)，得

$$\left.\begin{array}{l} \xi_{ri}\boldsymbol{w}_r - \xi_i\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{o} \\ \xi_{ir}\boldsymbol{w}_r - \xi_i\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{o} \end{array}\right\} \quad i = 3, \cdots, n, (\text{对 } i \text{ 不求和}). \tag{7}$$

根据 $\{\boldsymbol{w}_i\}$ 的线性无关，除了 ξ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ 和 $\xi_{ii} = \xi_i$ $(i = 3, \cdots, n)$ 外，其余系数 ξ_{ij} 均为零. 这时

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}) = \xi_{11}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + \xi_{12}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} + \xi_{21}\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u} + \xi_{22}\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$$

$$+ \sum_{i=3}^{n} \xi_i\boldsymbol{w}_i\otimes\boldsymbol{w}_i. \tag{8}$$

现在进一步利用各向同性条件 (1.14). 为了求得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{QCQ}^*)$，考虑到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\boldsymbol{Q}^* &= \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})\boldsymbol{Q}^* \\ &= (\boldsymbol{Qu})\otimes(\boldsymbol{Qv}) - (\boldsymbol{Qv})\otimes(\boldsymbol{Qu}) \\ &= (\boldsymbol{Qu})\wedge(\boldsymbol{Qv}), \end{aligned}$$

只需在 (8) 中用 $\boldsymbol{Qu}, \boldsymbol{Qv}, \boldsymbol{Qw}_i$ 代替 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i$. 这时各函数 ξ_{ij} 的自变量就是 $\boldsymbol{Qu}$ 和 $\boldsymbol{Qv}$，我们记作 ξ_{ij}^Q. 这样，各向同性条件就给出

$$\begin{aligned} &(\xi_{11} - \xi_{11}^Q)(\boldsymbol{Qu})\otimes(\boldsymbol{Qu}) + (\xi_{12} - \xi_{12}^Q)(\boldsymbol{Qu})\otimes(\boldsymbol{Qv}) \\ &\quad + (\xi_{21} - \xi_{21}^Q)(\boldsymbol{Qv})\otimes(\boldsymbol{Qu}) + (\xi_{22} - \xi_{22}^Q)(\boldsymbol{Qv})\otimes(\boldsymbol{Qv}) \\ &\quad + \sum_{i=3}^{n}(\xi_i - \xi_i^Q)(\boldsymbol{Qw}_i)\otimes(\boldsymbol{Qw}_i) = \boldsymbol{O}. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Q}$ 的正交性使 $\{\boldsymbol{Qw}_i\}$ 仍然是一组基. 上式各简单仿射量是线性无关的，于是

$$\xi_{ij}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \xi_{ij}(\boldsymbol{Qu}, \boldsymbol{Qv}), \quad i, j = 1, 2, \tag{9}$$

$$\xi_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \xi_i(\boldsymbol{Qu}, \boldsymbol{Qv}) \quad i = 3, \cdots, n. \tag{10}$$

上两式说明，ξ_{ij} 和 ξ_i 均是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的各向同性标量值函数. 根据 Cauchy 基本表示定理，它们均应表示为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 各内积的函数. 但由于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 受单位正交条件的限制：$\boldsymbol{uu} = \boldsymbol{vv} = 1$，$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu} = 0$，(8) 式的 ξ_{ij} 和 ξ_i 只能是与 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 无关的常数. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C})$ 的线性

性质使得它亦线性依赖于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$. 各 $\boldsymbol{w}_i$ 依赖于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$, 但不能由 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 线性表出,则各 $\boldsymbol{w}_i\otimes\boldsymbol{w}_i$ 亦不可能线性依赖于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$. 因此 ξ_{11}, ξ_{22} 和各 ξ_i 必须为零. 从而有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})=\xi_{12}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}+\xi_{21}\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}. \tag{11}$$

也是根据线性性质,又有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{u})=-\xi_{12}\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}-\xi_{21}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}. \tag{12}$$

比较上两式,根据 $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$ 线性无关,我们就有

$$\xi_{12}=-\xi_{21}\equiv 2\alpha \tag{13}$$

及

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})=2\alpha(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})=2\alpha\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}. \tag{14}$$

利用上式及 $\boldsymbol{A}$ 在标准 2-形式基上的表示,就有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{F}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}A_{ij}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}A_{ij}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j)\\&=2\alpha\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}A_{ij}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=2\alpha\boldsymbol{A}.\end{aligned} \tag{15}$$

显然,具有形式 (1) 的函数必然是各向同性的.

6.2 推论 反称仿射量的线性各向同性仿射量值函数的值域是 Skw.

6.3 定理 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的线性仿射量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 是各向同性的,当且仅当它可表示为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})=\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{T})\boldsymbol{I}+\mu(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^*)+\alpha(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^*),\quad \forall\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}_2(\mathscr{V}). \tag{16}$$

其中 λ, μ, α 是常数.

证明 将 $\boldsymbol{T}$ 加法分解,利用 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 的线性,得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^*)\right)+F\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}^*)\right). \tag{17}$$

公式 (17) 右端两函数的自变量分别是对称和反称的,因而可分别应用定理 5.1 和定理 6.1. 考虑到

$$\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^*)\right)=\operatorname{tr}\boldsymbol{T},$$

就得 (16).

§7 张量函数的微分和导数

导数(即梯度)刻划张量函数的变化率(随着自变量的变化),而微分则近似地表现张量函数的增量. 微分运算包含的基本思想在于用一个线性映射对一个函数进行局部逼近. 在推广一元函数 $f(t)$ 导数的定义

$$f'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[f(t+s)-f(t)] \tag{1}$$

于张量函数的过程,出现两个问题:(i)需要在涉及的张量空间引进距离的概念,使取极限的过程成为可能;(ii)张量函数的自变量的增量也是张量,不能用它按(1)作除法,需要避开作差商定义导数.

为此,下面引进一些概念.

7.1 定义 设 $\mathscr{V}$ 是一个集合. **距离**是一个映射 $\rho:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathrm{R}$: $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\longmapsto\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, 满足 $(\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathscr{V})$:

(i) 非负性 $\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\geqslant 0$, 且 $\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$

(ii) 对称性 $\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$

(iii) 三角不等式 $\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\leqslant\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})+\rho(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$.

$\mathscr{V}$ 称为以 $\rho(,)$ 为距离的**距离空间**或**度量空间**. □

$\mathscr{V}$ 中的元素列 $\{\boldsymbol{u}_n\}$ 收敛于 $\boldsymbol{u}$, 是指下述极限过程:

$$\rho(\boldsymbol{u}_n,\boldsymbol{u})\to 0,\qquad \text{当 } n\to\infty,$$

而 $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{u}$ 用 $\rho(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\to 0$ 来定义.

每个张量空间都是向量空间.我们首先在张量空间中赋以"范数",使之成为线性赋范空间,然后在范数的基础上诱导出距离.

7.2 定义 设 $\mathscr{V}$ 是向量空间. 如果定义一个映射 $\|\cdot\|:\mathscr{V}\to\mathrm{R}$, 满足 $(\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V};\alpha\in\mathrm{R})$:

(i) $\|\boldsymbol{u}\|\geqslant 0$, 且 $\|\boldsymbol{u}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$

(ii) $\|\alpha\boldsymbol{u}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|$

(iii) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\leqslant\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$,

则 $\mathscr{V}$ 称为**线性赋范空间**，$\|\boldsymbol{u}\|$ 称为向量 $\boldsymbol{u}$ 的**范数**. □

本书涉及的都是有限维向量空间. 泛函分析告诉我们，在有限维向量空间，所有范数是等价的（即所有范数诱导出相同的拓扑）. 因此，我们只需任意选定一种范数.在讨论中甚至无需说明，所用范数是如何定义的. 在向量空间 $\mathscr{V}$ 中，通常取向量 $\boldsymbol{u}$ 的长度 $|\boldsymbol{u}|$ 作为范数 $\|\boldsymbol{u}\|$；而在仿射量空间 $\mathrm{Lin} \equiv \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$ 中，对仿射量 $\boldsymbol{T}$，可取范数为 $\|\boldsymbol{T}\| := \sqrt{\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}} = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T})}$.容易证明，这样取的范数均满足范数公理的三个条件.

设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$. 我们定义向量 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ 的长度为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的距离：

$$\rho(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|. \tag{2}$$

显然，它满足距离公理的三个条件.

设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{W}$ 是线性赋范空间. 张量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 的定义域是 $\mathscr{U}$ 的零点 $\boldsymbol{o}$ 的一个邻域，值域为 $\mathscr{W}$. 我们说 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 比 $\boldsymbol{u}$ 更快地趋于零，并记为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = o(\boldsymbol{u}) \quad 当 \quad \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{o}$$

（经常省略"当 $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{o}$"），

如果

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\|}{\|\boldsymbol{u}\|} = 0.$$

这里 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})\|$ 和 $\|\boldsymbol{u}\|$ 分别是 $\mathscr{W}$ 和 $\mathscr{U}$ 上的范数. 类似地，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) + o(\boldsymbol{u})$$

表示

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = o(\boldsymbol{u}).$$

下面就可以进入张量分析了. 先从 $\mathscr{U} = \mathbf{R}$，而 $\mathscr{W}$ 可为任意张量空间的简单情形入手. 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是定义域为开区间 $I \subset \mathbf{R}$ 的张量值函数. $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $t \in I$ 的**导数** $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)$，如果存在的话，定义为

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) \equiv \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{dt}(t) := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\,[\boldsymbol{\Phi}(t+s) - \boldsymbol{\Phi}(t)]. \tag{3}$$

显然，按定义，导数和函数值是同类型的张量.$\boldsymbol{\Phi}$ 称为**光滑的**，如果

$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)$在每个 t 存在，且 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 I 连续．设 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 t 可微，则 (3) 导致

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[\boldsymbol{\Phi}(t+s)-\boldsymbol{\Phi}(t)-s\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\right]=\boldsymbol{O},$$

或等价地

$$\boldsymbol{\Phi}(t+s)=\boldsymbol{\Phi}(t)+s\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)+o(s). \tag{4}$$

$s\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)$ 是增量 $\boldsymbol{\Phi}(t+s)-\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的主要部分，它线性地依赖于自变量的增量 s．于是，$\boldsymbol{\Phi}(t+s)-\boldsymbol{\Phi}(t)$ 等于增量线性主部加上一个较 s 更快地趋于零的项．把结果 (4) 推广于 $\mathscr{U}$ 是任意张量空间的情形是容易的．为此需要一个引理．

7.3 引理（商法则） 设 $\boldsymbol{\Psi}:\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}):\boldsymbol{\Phi}\longmapsto\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})$ 是自变量为 r 阶张量的 s 阶张量值线性函数，则存在唯一的 $\boldsymbol{\Theta}\in\mathscr{T}_{r+s}(\mathscr{V})$，使得在右 r-点乘意义下实现上述映射：

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Phi}.\ \square \tag{5}$$

在左 r-点乘意义下也可得类似结果．

证明 点乘的线性性质使得，任何 $\boldsymbol{\Theta}$ 均，按 (5)，实现线性映射．现对给定线性映射 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})$，利用 (5)，对 $\boldsymbol{\Theta}$ 的存在性进行构造性证明．这个 $r+s$ 重线性函数 $\boldsymbol{\Theta}$ 在任意 $r+s$ 个向量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 上的值是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)&=\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s,v_1^{i_1}\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,v_r^{i_r}\boldsymbol{g}_{i_r})\\
&=\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r})\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{g}^{i_1})\cdots\boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{g}^{i_r})\\
&=(\boldsymbol{\Theta}\otimes\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r)(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r},\boldsymbol{g}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}^{i_r})\\
&=(\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r)(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s)\\
&=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r)(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s).
\end{aligned}\tag{6}$$

可见，$\boldsymbol{\Psi}$ 在简单张量上的值已足以确定 $\boldsymbol{\Theta}$ 在任何向量上的值．还要证，(6) 所确定的 $\boldsymbol{\Theta}$ 对任意 $\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}$ 也适合 (5)．为此，只需利用点乘的线性性质，(6) 的最后一等式及 $\boldsymbol{\Psi}$ 的线性性质，即可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Phi}&=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\\
&=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r})=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi}).
\end{aligned}$$

设有 $\boldsymbol{\Theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\Theta}_2$ 满足 (6)，则 $\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，有 $(\boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2)\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{O}$.

根据点乘的线性性质及零张量的定义，依次等价地有

$$(\boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2)\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{O}, \quad \forall \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V},$$

$$((\boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2)\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_r)(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s) = 0,$$

$$\forall \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s \in \mathscr{V},$$

$$(\boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2)(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r) = 0,$$

$$\forall \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s, \ \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \in \mathscr{V}.$$

可知，$\boldsymbol{\Theta}_1 - \boldsymbol{\Theta}_2$ 是零张量. 唯一性得证. □

7.4 定义 设 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 和 $\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 是赋范的张量空间，$\mathscr{D} \subset \mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 是开子集. 张量函数 $\boldsymbol{\Phi}: \mathscr{D} \to \mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 在 $\boldsymbol{T} \in \mathscr{D}$ 称为可微的，如果存在线性变换

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}): \mathscr{T}_r(\mathscr{V}) \to \mathscr{T}_s(\mathscr{V}): \boldsymbol{U} \longmapsto \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})(\boldsymbol{U}), \qquad (7)$$

使得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}) + \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{U} + o(\boldsymbol{U}). \qquad (8)$$

式 (8) 中的增量线性部份的写法已经用到了引理 7.3. $\dfrac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})$，经常简记为 $\dfrac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}$，称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{T} \in \mathscr{D}$ 的**导数(或梯度)**.

7.5 定理 如果 $\boldsymbol{\Phi}$ 的导数 $\dfrac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}$ 存在，则它是唯一的，并且对任意 $\boldsymbol{U} \in \mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 有

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{U} = \frac{d}{ds}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U})\big|_{s=0}. \qquad (9)$$

证明 引理 7.3 给出唯一性. 由线性性质，(8) 可写成

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}) = s\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{U} + o(s\boldsymbol{U}).$$

于是

$$\frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{U} = \frac{1}{s}[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}) + o(s\boldsymbol{U})]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})] \tag{10}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + (t+s)\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + t\boldsymbol{U})]|_{t=0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + (s+t)\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U})]|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U})|_{s=0}.$$

7.6 定义 张量函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 的增量的线性部分称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**微分**，记为

$$d\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}; \boldsymbol{U}) = \frac{d\boldsymbol{\Phi}}{d\boldsymbol{T}}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{U}, \tag{11}$$

它依赖于自变量 $\boldsymbol{T}$ 和线性依赖于方向 $\boldsymbol{U}$（自变量的增量）. □

可以按照方便，采用 (8), (9) 或 (10) 去计算张量函数的导数和微分，或对它们的性质进行讨论. 三个公式是同样有效的. 下面先对一种简单情形进行讨论.

7.7 定理 设 $r = 2, s = 0$，即 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V}) = \mathrm{Lin}$, $\mathscr{T}_s(\mathscr{V}) = \mathbf{R}$; $W(\boldsymbol{T})$ 是自变量为仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的标量值函数. 如果 $W(\boldsymbol{T})$ 各向同性，则它的微分 $dW(\boldsymbol{T}; \boldsymbol{U})$ 和导数 $\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}$（作为仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的仿射量值函数）也是各向同性的.

证明 只需用 (10), (11) 式和 $W(\boldsymbol{T})$ 的各向同性条件，就有

$$\begin{aligned} dW(\boldsymbol{QTQ}^*; \boldsymbol{QUQ}^*) &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [W(\boldsymbol{QTQ}^* + s\boldsymbol{QUQ}^*) \\ &\quad - W(\boldsymbol{QTQ}^*)] \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [W(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U})\boldsymbol{Q}^*) - W(\boldsymbol{QTQ}^*)] \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [W(\boldsymbol{T} + s\boldsymbol{U}) - W(\boldsymbol{T})] = dW(\boldsymbol{T}; \boldsymbol{U}). \end{aligned}$$

根据引理 7.3，上面的结果又可写成

$$\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{U} = \frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QTQ}^*):(\boldsymbol{QUQ}^*)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left(\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QTQ}^*)\right)^*(\boldsymbol{QUQ}^*)\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}^*\left(\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QTQ}^*)\right)^*\boldsymbol{QU}\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left(\boldsymbol{Q}^*\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QTQ}^*)\boldsymbol{Q}\right)^*\boldsymbol{U}\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{Q}^*\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QTQ}^*)\ \boldsymbol{Q}\right):\boldsymbol{U}.$$

由 $\boldsymbol{U}$ 的任意性，根据 (III.9.10)，有

$$\boldsymbol{Q}\frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{Q}^* = \frac{dW}{d\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{QTQ}^*).$$

这就是 $W(\boldsymbol{T})$ 的梯度的各向同性公式.

7.8 定理 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的基，则 $W(\boldsymbol{T})$ 的梯度有分量表示式：

$$\frac{dW}{d\boldsymbol{T}} = \frac{\partial W}{\partial T_{ij}}\ \boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j = \frac{\partial W}{\partial T^i{}_j}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j$$

$$= \frac{\partial W}{\partial T_i{}^j}\ \boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j = \frac{\partial W}{\partial T^{ij}}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j. \tag{12}$$

证明 在基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 下，$W(\boldsymbol{T})$ 就是 $\boldsymbol{T}$ 的分量，譬如 T_{ij} 的多元函数[1]. 利用 (9) 和 (11) 式，我们有

$$dW(T_{ij};\ U_{ij}) = \frac{d}{ds}W(T_{ij}+sU_{ij})\big|_{s=0} = \frac{\partial W}{\partial T_{ij}}U_{ij}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial T_{ij}}\ \delta^r_i\delta^s_j U_{rs} = \left(\frac{\partial W}{\partial T_{ij}}\ \boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\right):(U_{rs}\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^s).$$

和 (11) 比较，由 $\boldsymbol{U}$ 的任意性，就得 $(12)_1$. (12) 的其余三式证法相同，又如

$$dW(T^i{}_j;U^i{}_j) = \frac{\partial W}{\partial T^i{}_j}U^i{}_j = \frac{\partial W}{\partial T^i{}_j}\ \delta^i_r\delta^s_j U^r{}_s$$

$$= \left(\frac{\partial W}{\partial T^i{}_j}\ \boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j\right):(U^r{}_s\boldsymbol{g}_r\otimes\boldsymbol{g}^s).\ \square$$

---

1) $W(\boldsymbol{T})$, $W(T_{ij})$, $W(T^i{}_j)$, ⋯的函数形式是不同的，但用同一个符号表示有方便之处.

如果自变量是对称仿射量 $\boldsymbol{S}$，则 $W(\boldsymbol{S})=W(\boldsymbol{S}^*)$，它的分量函数只能是 $\boldsymbol{S}$ 的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立分量的函数：$W(S_{ij})$ $(i\leqslant j)$，或者是具有下列形式的 n^2 个分量的函数：

$$W\left(\frac{S_{ij}+S_{ji}}{2}\right). \tag{13}$$

后者可看作为在 $W(S_{ij})$，$(i\leqslant j)$ 中用 $\frac{1}{2}$ $(S_{ij}+S_{ji})$ 代替所有 S_{ij} 的结果。在对称自变量情况下，增量 $\boldsymbol{U}$ 和梯度 $\frac{dW}{d\boldsymbol{S}}$ 只能是对称仿射量。求梯度的分量必须对形式 (13) 的分量函数进行偏微商。

例 1. $W(\boldsymbol{S})=(S_{12})^2-\frac{1}{4}(S_{12}+S_{21})^2$,

$$\frac{\partial W}{\partial S_{12}}=\frac{1}{2}(S_{12}+S_{21})=S_{12}, \quad \frac{\partial W}{\partial S_{21}}=\frac{\partial W}{\partial S_{12}}.$$

例 2. 计算仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的 r 次矩 $\bar{I}_r=\operatorname{tr}\boldsymbol{T}^r$ 的微分和梯度。

$$\begin{aligned}d\bar{I}_r(\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{U})&=\frac{d}{ds}\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}+s\boldsymbol{U})^r\big|_{s=0}=\frac{d}{ds}\operatorname{tr}[\boldsymbol{T}^r\\&+s(\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{r-1}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{r-2}+\cdots+\boldsymbol{T}^{r-1}\boldsymbol{U})+s^2(\cdots)\\&+\cdots+s^r\boldsymbol{U}^r]\big|_{s=0}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{r-1}+\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}^{r-2}+\cdots\\&+\boldsymbol{T}^{r-1}\boldsymbol{U})=r\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}^{r-1}\boldsymbol{U})=r\boldsymbol{T}^{(r-1)*}:\boldsymbol{U}.\end{aligned}$$

和一般公式

$$d\bar{I}_r(\boldsymbol{T};\boldsymbol{U})=\frac{d\bar{I}_r}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{U}$$

比较，由 $\boldsymbol{U}$ 的任意性，又得 $\bar{I}_r(\boldsymbol{T})$ 的梯度

$$\frac{d\bar{I}_r}{d\boldsymbol{T}}=r\boldsymbol{T}^{(r-1)*}. \tag{14}$$

特别地，我们有

$$\frac{d\bar{I}_1}{d\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{I}, \quad \frac{d\bar{I}_2}{d\boldsymbol{T}}=2\boldsymbol{T}^*, \quad \frac{d\bar{I}_3}{d\boldsymbol{T}}=3\boldsymbol{T}^{2*}. \tag{15}$$

例 3. 计算仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的主不变量 $I_r(\boldsymbol{T})$ 的梯度。

$I_r(\boldsymbol{T})$ 可以由 $\boldsymbol{T}$ 的前 r 个矩表示：$I_r(\bar{I}_1, \cdots, \bar{I}_r)$，故

$$\frac{dI_r}{d\boldsymbol{T}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial I_r}{\partial \bar{I}_i} \frac{d\bar{I}_i}{d\boldsymbol{T}} = \sum_{i=1}^{r} i \frac{\partial I_r}{\partial \bar{I}_i} \boldsymbol{T}^{(i-1)*}. \tag{16}$$

特别地，考虑到 (III.5.30)，我们有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dI_1}{d\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}, \\
&\frac{dI_2}{d\boldsymbol{T}} = \bar{I}_1 \frac{d\bar{I}_1}{d\boldsymbol{T}} - \frac{1}{2} \frac{d\bar{I}_2}{d\boldsymbol{T}} = I_1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^*, \\
&\frac{dI_3}{d\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \bar{I}_2)\frac{d\bar{I}_1}{d\boldsymbol{T}} - \frac{1}{2}\bar{I}_1 \frac{d\bar{I}_2}{d\boldsymbol{T}} + \frac{1}{3}\frac{d\bar{I}_3}{d\boldsymbol{T}} \\
&\qquad = I_2\boldsymbol{I} - I_1\boldsymbol{T}^* + \boldsymbol{T}^{2*}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

例 4. 计算对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的各向同性标量值函数 $W(\boldsymbol{S})$ 的梯度。

根据表示定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{d\boldsymbol{S}} &= \frac{\partial W}{\partial I_r} \frac{dI_r}{d\boldsymbol{S}} = \frac{\partial W}{\partial I_r} \sum_{i=1}^{r} i \frac{\partial I_r}{\partial \bar{I}_i} \boldsymbol{S}^{(i-1)*} \\
&= \frac{\partial W}{\partial I_r} \sum_{i=1}^{r} i \frac{\partial I_r}{\partial \bar{I}_i} \boldsymbol{S}^{i-1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

特别地，当 $n = 3$，

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{d\boldsymbol{S}} &= \frac{\partial W}{\partial I}\boldsymbol{I} + \frac{\partial W}{\partial II}\frac{dII}{d\boldsymbol{S}} + \frac{\partial W}{\partial III}\frac{dIII}{d\boldsymbol{S}} \\
&= \frac{\partial W}{\partial I}\boldsymbol{I} + \frac{\partial W}{\partial II}(I\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}) + \frac{\partial W}{\partial III}(II\boldsymbol{I} - I\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^2) \\
&= \left(\frac{\partial W}{\partial I} + I\frac{\partial W}{\partial II} + II\frac{\partial W}{\partial III}\right)\boldsymbol{I} - \left(\frac{\partial W}{\partial II} + I\frac{\partial W}{\partial III}\right)\boldsymbol{S} \\
&\quad + \frac{\partial W}{\partial III}\boldsymbol{S}^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

例 5. 计算 $W(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}$ 的微分和导数。

这次我们利用 (8) 式，有

$$W(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}) = (\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}):(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{T}:\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}:\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}:\boldsymbol{T}$$

$$+ U:U = W(T) + 2T:U + o(U).$$

从而得

$$dW(T;U) = 2T:U, \quad \frac{dW}{dT}(T) = 2T.$$

这里用到

$$U:T = \mathrm{tr}(U^*T) = \mathrm{tr}(U^*T)^* = \mathrm{tr}(T^*U) = T:U.$$

7.9 定理 正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的行列式 $W(\boldsymbol{T}) = \det \boldsymbol{T}$ 的微分和梯度分别是

$$dW(T;U) = (\det T)T^{-*}:U, \tag{20}$$

$$\frac{dW}{dT} = \frac{d}{dT}(\det T) = (\det T)T^{-*}. \tag{21}$$

证明 根据 (III. 5.19, 20)，对任意仿射量 $\boldsymbol{R}$ 有

$$\det(R - \lambda I) = (-\lambda)^n + I_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + I_{n-1}(-\lambda) + \det R.$$

当 $\lambda = -1$ 和 $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{O}$ 时，得

$$\det(I + R) = 1 + \mathrm{tr}\, R + o(R).$$

利用这结果，对正则仿射 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{O}$ 时，有

$$\begin{aligned}\det(T + U) &= \det[(I + UT^{-1})T] \\ &= (\det T)\det(I + UT^{-1}) \\ &= (\det T)[1 + \mathrm{tr}(UT^{-1}) + o(U)] \\ &= \det T + (\det T)\,\mathrm{tr}(T^{-1}U) + o(U).\end{aligned}$$

利用 (8) 式，就得 (20) 及 (21). □

现讨论仿射量的仿射量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$. 根据 (11)，有

$$dF(T;U) = \frac{dF}{dT}:U. \tag{22}$$

这时 $\dfrac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{T}}$ 是四阶张量.

7.10 定理 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 各向同性，则 $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T};\boldsymbol{U})$ 亦各向同性.

证明 类似于定理 7.7，证明由下式给出.

$$dF(QTQ^*;QUQ^*)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[F(QTQ^*$$

$$+sQUQ^*)-F(QTQ^*)]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[F(Q(T$$

$$+sU)Q^*)-F(QTQ^*)]=Q\left\{\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[F(T\right.$$

$$\left.+sU)-F(T)]\right\}Q^*=QdF(T;U)Q^*.$$

7.11 定理 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的基,则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})$ 的梯度具有分量表达式:

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{T}}=\frac{\partial F^{ij}}{\partial T_{kl}}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$=\frac{\partial F^i{}_j}{\partial T^k{}_l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l=\cdots. \tag{23}$$

证明 在基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 下,$\boldsymbol{F}$ 的分量 F^{ij} 就是 $\boldsymbol{T}$ 的分量,譬如 T_{ij} 的函数。利用(9)和(11)式,得

$$d\boldsymbol{F}(T_{kl};U_{kl})=\frac{d}{ds}F^{ij}(T_{kl}+sU_{kl})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j|_{s=0}$$

$$=\frac{\partial F^{ij}}{\partial T_{kl}}U_{kl}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j=\left(\frac{\partial F^{ij}}{\partial T_{kl}}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l\right)$$

$$:(U_{rt}\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^t).$$

和(22)比较,就得$(23)_1$。

例 6. 应用公式$(23)_2$,计算若干个特殊仿射量值函数的梯度。

(i) $$\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{T}}=\frac{\partial T^i{}_j}{\partial T^k{}_l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l=\delta^i_k\delta^l_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$=\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j.$$

$$d\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T};\boldsymbol{T})=\frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j):(T^k{}_l\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}^l)$$

$$=T^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j=\boldsymbol{T}.$$

(ii) $$\frac{d\boldsymbol{T}^*}{d\boldsymbol{T}}=\frac{\partial T^i{}_j}{\partial T^k{}_l}\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l=\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j$$

$$= \boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{g}_i.$$

$$d\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{T}) = \frac{d\boldsymbol{T}^*}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j):(T^k{}_l\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}^l)$$

$$= T_j^i\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{T}^*.$$

(iii) $$\frac{d\boldsymbol{T}^2}{d\boldsymbol{T}} = \frac{\partial(T^i{}_rT^r{}_j)}{\partial T^k{}_l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$= (\delta^i_k\delta^l_rT^r{}_j + \delta^r_k\delta^l_jT^i{}_r)\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$= (\delta^i_kT^l{}_j + \delta^l_jT^i{}_k)\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$= T^i{}_j(\boldsymbol{g}_r\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}_i + \boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}_r).$$

$$d\boldsymbol{T}^2(\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{T}) = \frac{d\boldsymbol{T}^2}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{T} = [(\delta^i_kT^l{}_j + \delta^l_jT^i{}_k)$$

$$\times\ \boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l]:(T^r{}_s\boldsymbol{g}_r\otimes\boldsymbol{g}^s)$$

$$= 2T^i{}_kT^k{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j = 2\boldsymbol{T}^2.$$

(iv) 一般地有

$$d\boldsymbol{T}^r(\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{U}) = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{T}+s\boldsymbol{U})^r\Big|_{s=0} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^{r-1} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}^{r-2}$$

$$+ \cdots + \boldsymbol{U}^{r-1}\boldsymbol{T}. \tag{24}$$

若 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{T}$，则

$$d\boldsymbol{T}^r(\boldsymbol{T};\boldsymbol{T}) = r\boldsymbol{T}^r. \tag{25}$$

(v) $\dfrac{d\boldsymbol{I}}{d\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{O}$ 是四阶零张量，它的每个分量是零。

$$0 = \frac{\partial\delta^l_j}{\partial T^k{}_l} = \frac{\partial(T^i{}_r\overset{-1}{T}{}^r{}_j)}{\partial T^k{}_l} = \delta^i_k\overset{-1}{T}{}^l{}_j + T^i{}_r\frac{\partial\overset{-1}{T}{}^r{}_j}{\partial T^k{}_l},$$

$$0 = \overset{-1}{T}{}^p{}_i\left(\delta^i_k\overset{-1}{T}{}^l_j + T^i_r\frac{d\overset{-1}{T}{}^r{}_j}{\partial T^k{}_l}\right) \Rightarrow \frac{\partial\overset{-1}{T}{}^i{}_j}{\partial T^k{}_l} = -\overset{-1}{T}{}^i{}_kT^l{}_j,$$

$$\frac{d\boldsymbol{T}^{-1}}{d\boldsymbol{T}} = \frac{\partial\overset{-1}{T}{}^i{}_j}{\partial T^k{}_l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l = -\overset{-1}{T}{}^i{}_k\overset{-1}{T}{}^l{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l$$

$$d\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{T};\ \boldsymbol{T}) = \frac{d\boldsymbol{T}^{-1}}{d\boldsymbol{T}}:\boldsymbol{T} = -(\overset{-1}{T}{}^i{}_k\overset{-1}{T}{}^l{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l):$$

$$(T^{\cdot}\boldsymbol{g}_r\otimes\boldsymbol{g}^s) = -\overset{-1}{T}{}^{i}{}_{r}T^{r}{}_{s}\overset{-1}{T}{}^{s}{}_{j}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j = -\boldsymbol{T}^{-1}. \quad \square$$

对称自变量的仿射量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S})$ 的导数是关于后两个自变量(向量)为对称的四阶张量。在具体基上，我们有 $F^{ij}(S_{kl})$，每个分量函数是 $\boldsymbol{S}$ 的 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立分量的函数。在求 $\frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{S}}$ 的分量而对 $F^{ij}(S_{kl})$ 进行偏微商时，要将所有分量函数化成 $F^{ij}\left(\frac{1}{2}\times(S_{kl}+S_{lk})\right)$形式。

多个自变量的张量函数，如 $W(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，的偏导数 $\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{B}}$，$\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{C}}$，$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{B}}$，$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{C}}$ 可按熟知的显然方式定义。

利用引理 7.3，我们有

7.12 命题 设 $\boldsymbol{\Psi}:\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}):\boldsymbol{\Phi}\mapsto\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Phi}$ 是线性函数，则它的导数是

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{d\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Theta}. \tag{26}$$

证明 根据 (8)，利用下式就可证明。

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Omega})=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})+\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Omega})=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})+\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Omega},$$

$$d\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi};\,\boldsymbol{\Omega})=\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{d\boldsymbol{\Phi}}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Theta}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Omega}.$$

§ 8 Leibniz 法则和链式法则

经常需要计算两个函数 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的各种乘积 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$ 的导数。乘积可以是数乘，张量积，缩并和 $\binom{r}{\cdot}$ 点乘等。因此，我们一般地考虑双线性映射：

$$\boldsymbol{\Pi}:\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\times\mathscr{T}_s(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_t(\mathscr{V}):(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})\mapsto\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}).$$

设 $\mathscr{D}\subset\mathscr{T}_p(\mathscr{V})$ 是开子集，而张量函数

$$\boldsymbol{F}:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_r(\mathscr{V}):\boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}),$$

$$\boldsymbol{G}:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}):\boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{G}(\boldsymbol{T})$$

的乘积是

$$H:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_t(\mathscr{V}):T\mapsto\Pi(F(T),\ G(T)).$$

8.1 定理（广义 Leibniz 法则） 设 F, G 在 $T\in\mathscr{D}$ 可微，则它们的乘积 $H=\Pi(F,G)$ 在 T 亦可微，且

$$dH(T;\ U)=\frac{dH}{dT}\binom{p}{\cdot}U=\Pi\left(\frac{dF}{dT}\binom{p}{\cdot}U,G(T)\right)$$

$$+\Pi\left(F(T),\frac{dG}{dT}\binom{p}{\cdot}U\right),\forall U\in\mathscr{T}_p(\mathscr{V}).\tag{1}$$

证明 所有单位元素 $f\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 和 $g\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 在相应的张量空间构成闭子集，它们的笛氏乘积也是闭子集。在这个乘积闭子集上，$\|\Pi(f,g)\|$ 达到极大值 M_p。对于非单位元素 $F\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 和 $G\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$，有相应的单位元素

$$f=\frac{F}{\|F\|}\quad 和\quad g=\frac{G}{\|G\|}.$$

根据 Π 的双线性性质，有

$$\|\Pi(F,G)\|=\|F\|\|G\|\|\Pi(f,g)\|\leqslant M_p\|F\|\|G\|.$$

由于 Π 的双线性，上述不等式对 $F=O$ 或 $G=O$ 也成立。类似地，可得

$$\left\|\frac{dF}{dT}\binom{p}{\cdot}U\right\|\leqslant M_f\|U\|,\quad\left\|\frac{dG}{dT}\binom{p}{\cdot}U\right\|\leqslant M_g\|U\|.$$

我们注意到

$$F(T+U)=F(T)+\frac{dF}{dT}\binom{p}{\cdot}U+o(U),$$

$$G(T+U)=G(T)+\frac{dG}{dT}\binom{p}{\cdot}U+o(U),$$

和

$$\left\|\Pi\left(\frac{dF}{dT}\binom{p}{\cdot}U,\frac{dG}{dT}\binom{p}{\cdot}U\right)\right\|\leqslant M_pM_fM_g\|U\|^2,$$

根据 Π 的双线性，得

$$H(T+U)=\Pi(F(T+U),\ G(T+U))$$

$$=\Pi(F(T)+\frac{dF}{dT}\binom{p}{\cdot}U+o(U),G(T)$$

$$+\frac{dG}{dT}\binom{p}{\cdot}U+o(U))=H(T)+\Pi\left(\frac{dF}{dT}\binom{p}{\cdot}U,\right.$$

$$\left.G(T)\right)+\Pi\left(F(T),\frac{dG}{dT}\binom{p}{\cdot}U\right)+o(U).$$

根据(7.8)，就得(1). □

我们看到，用抽象记法得不出函数乘积的导数的显式表示. 但用分量记法却是可能的，例如，考虑 $F, G, T \in \text{Lin}$, $\Pi(F, G) = F\otimes G = F^{ij}G_{kl}g_i\otimes g_j\otimes g^k\otimes g^l$，则 $\frac{d(F\otimes G)}{dT}$ 具有分量

$$\left(\frac{d(F\otimes G)}{dT}\right)^{ij}_{\ \ klrs}=\frac{\partial F^{ij}}{\partial T^{rs}}G_{kl}+F^{ij}\frac{\partial G_{kl}}{\partial T^{rs}}.$$

8.2 推论(Leibniz 法则) 设 φ; u, v; S, T 分别是光滑的标量值，向量值和仿射量值函数，定义域为 $\mathscr{D}=I\subset\mathbb{R}$. 这时

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\overline{\varphi u}}&=\dot{\varphi}u+\varphi\dot{u},\\
\dot{\overline{uv}}&=\dot{u}v+u\dot{v},\\
\dot{\overline{Tu}}&=\dot{T}u+T\dot{u},\\
\dot{\overline{S\otimes T}}&=\dot{S}\otimes T+S\otimes\dot{T},\\
\dot{\overline{ST}}&=\dot{S}T+S\dot{T},\\
\dot{\overline{S:T}}&=\dot{S}:T+S:\dot{T}.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

8.3 定理(链式法则) 设 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$, $\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$, $\mathscr{T}_t(\mathscr{V})$ 是赋范的张量空间 $\mathscr{D}\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 和 $\mathscr{C}\subset\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 是相应的开子集. 给定张量函数

$$F:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}),\quad G:\mathscr{C}\to\mathscr{T}_t(\mathscr{V}),$$

其中 F 的值域包含在 $\mathscr{C}$. 设 F 和 G 分别在 $T\in\mathscr{D}$ 和 $F(T)\in\mathscr{C}$ 可微，则复合函数 $H=G\circ F$ 在 T 可微，并且

$$\frac{dH}{dT}=\frac{dG}{dF}\binom{s}{\cdot}\frac{dF}{dT}.\tag{3}$$

证明 根据(8)，有

$$H(T+U)=H(T)+\frac{dH}{dT}\binom{r}{\cdot}U+o(U). \tag{4}$$

另一方面又有

$$H(T+U)=G(F(T+U))=G\Big(F(T)+\frac{dF}{dT}\binom{r}{\cdot}U$$

$$+o(U)\Big)=G(F(T))+\frac{dG}{dF}\binom{s}{\cdot}\Big(\frac{dF}{dT}\binom{r}{\cdot}U$$

$$+o(U)\Big)+o(U)=H(T)+\frac{dG}{dF}\binom{s}{\cdot}\frac{dF}{dT}\binom{r}{\cdot}U$$

$$+o(U). \tag{5}$$

比较 (4) 和 (5)，考虑到 U 的任意性，根据 (III.9.11)，即得 (3)。这里考虑到 $\left\|\frac{dG}{dF}\binom{s}{\cdot}o(U)\right\|\leqslant Mo(U)=o(U)$. □

当 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})=\mathrm{R}$ 时，$H(t)=G(F(t))$，我们有

$$\dot{H}=\frac{dG}{dF}\binom{s}{\cdot}\dot{F}. \tag{6}$$

8.4 命题 设 $T(t)$ 是在 $I\subset\mathrm{R}$ 上的光滑仿射量值函数，则

$$\dot{\overline{T^*}}=(\dot{T})^*=\dot{T}^*. \tag{7}$$

如果 $T(t)$ 在 $t\in I$ 可逆，则

$$\dot{\overline{\det T}}=(\det T)T^{-*}:\dot{T}. \tag{8}$$

证明 定义转置映射

$$(\quad)^*:\mathscr{T}_2(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_2(\mathscr{V}):T\longmapsto T^*=T_\sigma:T.$$

根据 (III.2.6)，转置是一种线性映射．又根据定理 8.3 和命题 7.12，依次地有

$$\frac{d(\quad)^*}{dT}=T_\sigma,$$

$$\dot{\overline{T^*}}=\frac{d(\quad)^*}{dT}:\dot{T}=T_\sigma:\dot{T}=(\dot{T})^*.$$

此即 (7)．利用 (7.21)，又可得

$$\dot{\overline{\det T}}=\Big(\frac{d}{dT}(\det T)\Big):\dot{T}=(\det T)T^{-*}:\dot{T}.$$

第 V 章 绝对微分学

§ 1 仿射空间和欧氏空间

1.1 定义 **仿射空间** $\mathscr{A}$ 是一个点集，定义有一个向量空间 $\mathscr{V}$（称为**自由向量空间**）和一个称为**点差函数**的映射

$$\boldsymbol{d}:\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{V}:(x,y)\longmapsto\boldsymbol{d}(x,y),\tag{1}$$

满足公理：

(i) $\boldsymbol{d}(x,y)+\boldsymbol{d}(y,z)=\boldsymbol{d}(x,z),\ \forall x,y,z\in\mathscr{A}$, (2)

(ii) 限制映射 $\boldsymbol{d}_x:\{x\}\times\mathscr{A}\to\mathscr{V}:(x,y)\longmapsto\boldsymbol{d}(x,y)$ 是双射的. □

这样，$\mathscr{V}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 就完全确定 $\mathscr{A}$ 的结构. 如果把点差理解为"从一点到另一点的移动"，则公理 (i) 的含义是"从点 x 到点 y，再从点 y 到点 z 的移动等于从点 x 直接到点 z 的移动". 只要在 (2) 取 $y=z=x$，就得

1.2 推论 原地不动的位移是零：

$$\boldsymbol{d}(x,x)=\boldsymbol{0},\ \forall x\in\mathscr{A}.\ \square\tag{3}$$

在 (2) 取 $z=x$，并利用 (3)，又有

1.3 推论 移动是有向的：

$$\boldsymbol{d}(y,x)=-\boldsymbol{d}(x,y),\ \forall x,y\in\mathscr{A}.\ \square\tag{4}$$

公理 (ii) 表示：

$$\forall x\in\mathscr{A};\ \boldsymbol{u}\in\mathscr{V},\ \exists!\ y\in\mathscr{A}:\boldsymbol{d}(x,y)=\boldsymbol{u}.\tag{5}$$

换言之，从点 x 移动 $\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{u}$，唯一地到达点 y，即 $(x,y)=\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{u}$. 我们记作

$$y=x+(x,y)\ \text{或}\ y-x=(x,y).\tag{6}$$

1.4 定义 自由向量空间 $\mathscr{V}$ 的维数定义为仿射空间 $\mathscr{A}$ 的维数：

$$\dim \mathscr{A} := \dim \mathscr{V}. \tag{7}$$

1.5 定义 $\forall a \in \mathscr{A}$，记有序点对为 $\boldsymbol{x}_a = (a, x)$，$\boldsymbol{y}_a = (a, y)$，…等. 这些点对的全体记为 $T_a\mathscr{A} := \{a\} \times \mathscr{A}$. 通过双射 $\boldsymbol{d}_a$ 在 $T_a\mathscr{A}$ 定义加法和数乘如下：

$$\boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{y}_a = (a, x) + (a, y) = \boldsymbol{d}_a^{-1}(\boldsymbol{d}(a, x) + \boldsymbol{d}(a, y)) \in T_a\mathscr{A}, \tag{8}$$

$$\alpha \boldsymbol{x}_a = \alpha(a, x) = \boldsymbol{d}_a^{-1}(\alpha \boldsymbol{d}(a, x)) \in T_a\mathscr{A}. \tag{9}$$

从而，$\mathscr{V}$ 的向量空间结构就移植给 $T_a\mathscr{A}$. 向量空间 $T_a\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ 在 a 点的**切空间**. 它的元素称为在 a 点的**切向量**（或**约束向量**）. 有时也说，作用在 a 点的向量. $\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}_a = (a, a)$就是零向量. 与此不同，$\mathscr{V}$ 的元素称为**自由向量**.

1.6 定理 限制映射

$$\boldsymbol{d}_a : T_a\mathscr{A} \to \mathscr{V} : \boldsymbol{x}_a \longmapsto \boldsymbol{d}(a, x)$$

是线性映射，因而是**同构映射**[1].

证明 只要将双射映射 $\boldsymbol{d}_a$ 分别作用于(8)和(9)，就得映射 $\boldsymbol{d}_a$ 的线性性质：

$$\boldsymbol{d}_a((a, x) + (a, y)) = \boldsymbol{d}(a, x) + \boldsymbol{d}(a, y),$$

$$\boldsymbol{d}_a(\alpha(a, x)) = \alpha \boldsymbol{d}(a, x).$$

1.7 定义 若仿射空间 $\mathscr{A}$ 的自由向量空间 $\mathscr{V}$ 是内积空间，并且 $\mathscr{V}$ 的内积诱导每 $a \in \mathscr{A}$ 的切空间 $T_a\mathscr{A}$ 的内积如下：

$$\boldsymbol{x}_a \boldsymbol{y}_a = \boldsymbol{d}(a, x)\boldsymbol{d}(a, y), \quad \forall \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{y}_a \in T_a\mathscr{A}, \tag{10}$$

则 $\mathscr{A}$ 称为**欧氏(点)空间**，记作 $\mathbf{E}$（如果要强调其维数 $\dim \mathbf{E} = \dim \mathscr{A} = n$，则写 $\mathbf{E}^n$）.

1.8 定义 欧氏空间 $\mathbf{E}$ 任意两点 x, y 的**距离**定义为

$$d(x, y) := |\boldsymbol{d}(x, y)| = |\boldsymbol{d}(y, x)|. \ \square \tag{11}$$

今后我们将在欧氏空间 $\mathbf{E}$ 中讨论问题，尽管有许多性质的讨论并不需要内积. 既然切空间 $T_a\mathbf{E}$ 是向量空间（甚至是内积空间），就可在其上定义各种张量，例如 $\boldsymbol{\Phi}(a) \in \mathscr{T}_r(T_a\mathbf{E})$. 对 $T_a\mathbf{E}$ 可以

---

1) 从向量空间到向量空间的保持加法和数乘的双射变换.

应用前几章陈述的张量代数。

§2 平行性和同态扩张

每一点 $a\in \mathrm{E}$ 有一个切空间 $T_a\mathrm{E}$. 属于不同切空间的切向量和张量不能直接进行代数运算，但可以定义它们的**平行性**(其实，并不需要欧几里德结构，在仿射空间就可以定义平行性.).

2.1 定义 如果

$$\boldsymbol{d}(a, x) = \boldsymbol{d}(b, y), \tag{1}$$

则 $\boldsymbol{x}_a = (a, x)$ 称为平行于 $\boldsymbol{y}_b = (b, y)$, 记作 $\boldsymbol{x}_a /\!/ \boldsymbol{y}_b$. 显然，平行性是一种等价关系. □

两个有序点对的平行性判断是通过点差函数 $\boldsymbol{d}$ 映射到 $\mathscr{V}$ 后进行的，而 $\boldsymbol{d}$ 是仿射空间的属性. 因此，由上述定义所唯一确定的仿射空间(欧氏空间)的平行性叫作**自然平行性**(相对于更一般的空间而言). 平行性是与度量无关的概念. 应注意的是，只有当 $\alpha = 1$ 时，$\boldsymbol{d}(a, x) = \alpha \boldsymbol{d}(b, y)$ 才是平行条件.

2.2 定理 (平行移动定理) $\forall b\in \mathrm{E}$; $\boldsymbol{x}_a\in T_a\mathrm{E}$, $\exists !\, \boldsymbol{y}_b\in T_b\mathrm{E} /\!/ \boldsymbol{x}_a$.

证明 将 $\boldsymbol{d}_b^{-1}$ 作用于平行性条件(1)，得

$$(b, y) = \boldsymbol{d}_b^{-1}\boldsymbol{d}(a, x) \text{ 即 } \boldsymbol{y}_b = \boldsymbol{d}_b^{-1}\boldsymbol{d}_a\boldsymbol{x}_a. \ \square \tag{2}$$

(2)式的几何意义就是 $\boldsymbol{d}_b^{-1}\boldsymbol{d}_a$ 将作用在点 a 的切向量 $\boldsymbol{x}_a$ 平行移动至点 b 而得切向量 $\boldsymbol{y}_b$. 由于限制点差函数是同构映射，可以将(2)反过来，又得

$$\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{d}_a^{-1}\boldsymbol{d}_b\boldsymbol{y}_b. \tag{3}$$

因此，由定理 1.6 和 2.2，我们有

2.3 推论 $\forall a, b\in \mathrm{E}$, 存在唯一的，满足条件(1)的同构映射

$$\boldsymbol{J}: T_a\mathrm{E} \to T_b\mathrm{E}: \boldsymbol{x}_a \longmapsto \boldsymbol{y}_b. \ \square \tag{4}$$

上述映射的定义没有用超过空间性质之外的附加条件，而由空间的属性所确定，称为**自然同构**.

2.4 推论 E 的全体点的切空间自然同构.

2.5 定理 设 $a, b, x, y \in \mathbf{E}$，则 $\mathbf{x}_a /\!/ \mathbf{y}_b \Longleftrightarrow \mathbf{y}_x /\!/ \mathbf{b}_a$.

证明 利用公理 (i)，我们有

$$\boldsymbol{d}(a, y) = \boldsymbol{d}(a, x) + \boldsymbol{d}(x, y) = \boldsymbol{d}(a, b) + \boldsymbol{d}(b, y). \tag{5}$$

将 $\mathbf{x}_a /\!/ \mathbf{y}_b$ 的条件 $\boldsymbol{d}(a, x) = \boldsymbol{d}(b, y)$ 代入 (5)，得 $\boldsymbol{d}(x, y) = \boldsymbol{d}(a, b)$。这表示 $\mathbf{y}_x /\!/ \mathbf{b}_a$. 充分性亦可同样证明. □

上述定理的几何意义是：对于由 a, b, x, y 构成的四边形，如果两对边平行，则另两边也平行，称为**平行四边形**.

2.6 定理（平行四边形法则） 给定在点 a 的切向量 $\mathbf{x}_a$ 和 $\mathbf{y}_a$. 取点 z，使得 $\mathbf{z}_x /\!/ \mathbf{y}_a$，则 a, x, y, z 构成平行四边形，并且 $\mathbf{z}_a$ 是 $\mathbf{x}_a$ 和 $\mathbf{y}_a$ 的和向量.

证明 由定义 2.1，假设 $\mathbf{z}_x /\!/ \mathbf{y}_a$ 表示

$$\boldsymbol{d}(x, z) = \boldsymbol{d}(a, y). \tag{6}$$

根据定理 2.5，又得 $\mathbf{z}_y /\!/ \mathbf{x}_a$，因而 a, x, y, z 构成平行四边形. 由公理 (i)，有

$$\boldsymbol{d}(a, z) = \boldsymbol{d}(a, x) + \boldsymbol{d}(x, z).$$

将 (6) 代入，得

$$\boldsymbol{d}(a, z) = \boldsymbol{d}(a, x) + \boldsymbol{d}(a, y). \tag{7}$$

以 $\boldsymbol{d}_a^{-1}$ 作用 (7)，并利用 (1.8)，就有

$$\mathbf{z}_a = \mathbf{x}_a + \mathbf{y}_a. \ \square$$

为了定义张量的平行性，需将限制映射扩张.

2.7 定义 限制点差函数 $\boldsymbol{d}_x: T_x\mathbf{E} \to \mathscr{V}$ 到 $T_x\mathbf{E}$ 上任意张量空间的**同态扩张**

$$\boldsymbol{D}_x: \mathscr{T}_r(T_x\mathrm{E}) \to \mathscr{T}_r(\mathscr{V}), \tag{8}$$

按下述条件定义

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Phi}(x)(\cdots, \boldsymbol{u}_x^i, \cdots) = \boldsymbol{D}_x\boldsymbol{\Phi}(x)(\cdots, \boldsymbol{d}_x\boldsymbol{u}_x^i, \cdots),\\ \forall \boldsymbol{\Phi}(x) \in \mathscr{T}_r(T_x\mathbf{E});\ \boldsymbol{u}_x^i \in T_x\mathbf{E},\end{gathered} \tag{9}$$

当 $r = 1$ 时，$\boldsymbol{D}_x = \boldsymbol{d}_x$. □

2.8 定理 同态扩张 $\boldsymbol{D}_x$ 是从 $\mathscr{T}_r(T_x\mathrm{E})$ 到 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 的同构映射.

证明 只需证 D_x 是线性和满映射. 根据定义(9)和张量的加法和数乘定义,有

$$\begin{aligned}
&D_x(\alpha\Phi(x)+\beta\Psi(x))(\cdots, d_x u_x^i, \cdots)\\
&\quad=(\alpha\Phi(x)+\beta\Psi(x))(\cdots, u_x^i, \cdots)\\
&\quad=\alpha\Phi(x)(\cdots, u_x^i, \cdots)+\beta\Psi(x)(\cdots, u_x^i, \cdots)\\
&\quad=\alpha D_x\Phi(x)(\cdots, d_x u_x^i, \cdots)+\beta D_x\Psi(x)\\
&\qquad\times(\cdots, d_x u_x^i, \cdots)=(\alpha D_x\Phi(x)\\
&\qquad+\beta D_x\Psi(x))(\cdots, d_x u_x^i, \cdots).
\end{aligned}$$

由$\cdots, u_x^i, \cdots$的任意性,得 D_x 的线性性质:

$$\begin{gathered}
D_x(\alpha\Phi(x)+\beta\Psi(x))=\alpha D_x\Phi(x)+\beta D_x\Psi(x),\\
\forall\Phi(x),\ \Psi(x)\in\mathscr{T}_r(T_x\mathrm{E});\ \alpha,\beta\in\mathrm{R}.
\end{gathered}\tag{10}$$

由于 d_x 是同构映射(定理 1.6), $\forall\mathring{u}^i\in\mathscr{V}$, $\exists!\ u_x^i\in T_x\mathrm{E}: d_x u_x^i=\mathring{u}^i$. 于是, $\forall\mathring{\Phi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$, $\exists!\ \Phi(x)\in\mathscr{T}_r(T_x\mathrm{E})$, 使得 $D_x\Phi(x)=\mathring{\Phi}$, 即

$$\begin{aligned}
\Phi(x)(\cdots, u_x^i, \cdots)&=D_x\Phi(x)(\cdots, d_x u_x^i, \cdots)\\
&=\mathring{\Phi}(\cdots, \mathring{u}^i, \cdots),\ \forall u_x^i\in T_x\mathrm{E}.
\end{aligned}$$

因此,存在逆映射 D_x^{-1}, 使得 $\Phi(x)=D_x^{-1}\mathring{\Phi}$, 即

$$\mathring{\Phi}(\cdots, \mathring{u}^i, \cdots)=D_x^{-1}\mathring{\Phi}(\cdots, d_x^{-1}\mathring{u}^i, \cdots),\ \forall\mathring{u}^i\in\mathscr{V}.\ \Box\tag{11}$$

容易证明如下定理

2.9 定理

$$D_x(u_x^1\otimes\cdots\otimes u_x^r)=(d_x u_x^1)\otimes\cdots\otimes(d_x u_x^r),\tag{12}$$

$$D_x(u_x^1\wedge\cdots\wedge u_x^r)=(d_x u_x^1)\wedge\cdots\wedge(d_x u_x^r).\tag{13}$$

2.10 定义 如果

$$D_x\Phi(x)=D_y\Psi(y),\tag{14}$$

则 $\Phi(x)\in\mathscr{T}_r(T_x\mathrm{E})$ 称为平行于 $\Psi(y)\in\mathscr{T}_r(T_y\mathrm{E})$, 记作 $\Phi(x)/\!/\Psi(y)$. 由此得**平行移动算子**:

$$\Psi(y)=D_y^{-1}D_x\Phi(x).\ \Box\tag{15}$$

利用平移算子, 可以将作用在某点的张量平行移动至 E 的任何点.

§3 仿射坐标系，典则基和笛氏坐标系

如果选定点 $O\in\mathbf{E}$ 和自由向量空间 $\mathscr{V}$ 的一组协变基 $\{\mathring{g}_i\}$，则限制于点 O 的点差函数 $\boldsymbol{d}_O$ 诱导出切空间 $T_O\mathbf{E}$ 的一组基(为什么是基?)

$$\{\boldsymbol{g}_i(O)\,|\,\boldsymbol{g}_i(O)=\boldsymbol{d}_O^{-1}\mathring{\boldsymbol{g}}_i\}. \tag{1}$$

并且，我们有复合双射映射

$$C(O,\{\mathring{\boldsymbol{g}}_i\}):\mathbf{E}\to T_O\mathbf{E}\to\mathscr{V}\to\mathbb{R}^n\ x\longmapsto(O,x)$$
$$=\boldsymbol{x}_O=x^i\boldsymbol{g}_i(O)\longmapsto\boldsymbol{d}_O\boldsymbol{x}_O=x^i\mathring{\boldsymbol{g}}_i\longmapsto(x^i). \tag{2}$$

这里考虑到限制映射的线性性质：$\boldsymbol{d}_O(x^i\boldsymbol{g}_i(O))=x^i\boldsymbol{d}_O\boldsymbol{g}_i(O)=x^i\mathring{\boldsymbol{g}}_i$.

3.1 定义 二元组 $(O,\{\mathring{\boldsymbol{g}}_i\})$ 在 $\mathbf{E}$ 定义一个**仿射坐标系** $\{x^i\}$，它赋予 $\mathbf{E}$ 的每一点 x 一个有序数组 $(x^i)\in\mathbb{R}^n$，称为 x 的 **(仿射) 坐标**. 点 O 称为**坐标原点**，其坐标是 $(0,\cdots,0)$. □

自由向量空间 $\mathscr{V}$ 的协变基 $\{\mathring{\boldsymbol{g}}_i\}$ 及其对偶基 $\{\mathring{\boldsymbol{g}}^i\}$，通过限制点差函数的逆映射，不仅在 $T_O\mathbf{E}$，而且可在任何点 x 的切空间 $T_x\mathbf{E}$ 诱导出两组基：

$$\boldsymbol{g}_i(x)=\boldsymbol{d}_x^{-1}\mathring{\boldsymbol{g}}_i,\quad \boldsymbol{g}^i(x)=\boldsymbol{d}_x^{-1}\mathring{\boldsymbol{g}}^i. \tag{3}$$

3.2 定义 由 $\mathscr{V}$ 的固定的协变基 $\{\mathring{\boldsymbol{g}}_i\}$ 诱导出 $\mathbf{E}$ 的各点的切空间的基 $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$ 称为**典则基**.

3.3 定理 各点典则基 $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$ 编号相同的基向量相互平行. 各点切空间 $T_x\mathbf{E}$ 在 $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$ 下的度量张量分量 $g_{ij}(x)$ 相同，等于 $\mathscr{V}$ 在 $\{\mathring{\boldsymbol{g}}_i\}$ 下的度量张量分量 $\mathring{g}_{ij}$. $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$ 和 $\{\boldsymbol{g}^i(x)\}$ 互为对偶基.

证明 由 $(3)_1$，有 $\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{g}_i(x)=\mathring{\boldsymbol{g}}_i=\boldsymbol{d}_y\boldsymbol{g}_i(y)$，从而 $\boldsymbol{g}_i(x)/\!/\boldsymbol{g}_i(y)$，$\forall x,\ y\in\mathbf{E}$. 根据度量张量协变分量的定义和定义 1.7，有

$$g_{ij}(x)=\boldsymbol{g}_i(x)\boldsymbol{g}_j(x)=(\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{g}_i(x))(\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{g}_j(x))$$
$$=\mathring{\boldsymbol{g}}_i\mathring{\boldsymbol{g}}_j=\mathring{g}_{ij}=(\boldsymbol{d}_y\boldsymbol{g}_i(y))(\boldsymbol{d}_y\boldsymbol{g}_j(y))$$
$$=g_{ij}(y),\quad\forall x,\ y\in\mathbf{E},$$

因而各 $g_{ij}(x)$ 是常数. 利用定义 1.7, 又得定理的最后一个结论:

$$\boldsymbol{g}_i(x)\boldsymbol{g}^j(x) = (\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{g}_i(x))(\boldsymbol{d}_x\boldsymbol{g}^j(x)) = \mathring{\boldsymbol{g}}_i\mathring{\boldsymbol{g}}^j = \delta_i^j. \ \square$$

在仿射坐标系 $\{x^i\}$ 下, 坐标为 $(0,\cdots,0,x^i,0,\cdots,0)$ (只有第 i 个坐标不恒为零而取所有可能值)的各点 x 对应的有序点对 $(O,x)=x^i\boldsymbol{g}_i(O)$ (不求和) 和基向量 $\boldsymbol{g}_i(O)$ 共线. 这些点构成一条沿 $\boldsymbol{g}_i(O)$ 方向两边无限延长的直线, 称为 x^i-**轴**: $\boldsymbol{d}_0(x^i\text{-轴}) = sp(\mathring{\boldsymbol{g}}_i)$. 因此,仿射坐标系又称为**直线坐标系**.

当坐标原点和 $\mathscr{V}$ 的基分别变为 O' 和 $\{\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}|\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}=A_{i'}^i\mathring{\boldsymbol{g}}_i\}$ 时, 我们得一个新的仿射坐标系 $\{x^{i'}\}$. 相应的复合双射映射是

$$C(O',\{\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}\}):\mathbf{E}\to T_{O'}\mathbf{E}\to\mathscr{V}\to\mathbf{R}^n x\longmapsto(O',x)$$
$$=\boldsymbol{x}_{O'}=x^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}(O')\longmapsto\boldsymbol{d}_{O'}\boldsymbol{x}_{O'}=x^{i'}\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}\longmapsto(x^{i'}). \quad (4)$$

在不同仿射坐标系里, 点 $x\in\mathbf{E}$ 的坐标是不同的. 现求其转换公式. 为此,设 $\boldsymbol{d}(O',O)=A^{i'}\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}\in\mathscr{V}$. 根据公理(i), 有

$$\boldsymbol{d}(O',x)=\boldsymbol{d}(O',O)+\boldsymbol{d}(O,x),$$

即

$$x^{i'}\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}=A^{i'}\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}+x^i\mathring{\boldsymbol{g}}_i=(A_i^{i'}x^i+A^{i'})\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}.$$

从而我们有

3.4 定理 当二元组由 $(O,\{\mathring{\boldsymbol{g}}_i\})$ 变为 $(O',\{\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}\})$, 即仿射坐标系由 $\{x^i\}$ 变为 $\{x^{i'}\}$ 时, 点 $x\in\mathbf{E}$ 的坐标 (x^i) 变为 $(x^{i'})$, 其转换法则是

$$x^{i'}=A_i^{i'}x^i+A^{i'} \quad (\det[A_i^{i'}]\neq 0). \ \square \quad (5)$$

由 $(O',\{\mathring{\boldsymbol{g}}_{i'}\})$ 变为 $(O'',\{\mathring{\boldsymbol{g}}_{i''}\})$ 时,又有

$$x^{i''}=A_{i'}^{i''}x^{i'}+A^{i''}, \quad (\det[A_{i'}^{i''}]\neq 0). \quad (6)$$

变换(5)和(6)称为**仿射变换**. 显然,仿射变换的全体构成群,称为**仿射群**. 若坐标原点不变,则坐标的转换法则变成线性变换:

$$x^{i'}=A_i^{i'}x^i. \quad (7)$$

这时有所谓**中心仿射群**. 变换(7)相同于向量逆变分量的转换法则.

3.5 定义 若 $\{\mathring{\boldsymbol{e}}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的标准正交基,则 $(O,\{\mathring{\boldsymbol{e}}_i\})$ 诱导

出 E 的一个特殊的仿射坐标系，称为**笛氏坐标系**. 在笛氏坐标系里，各点的典则基是标准正交基，因此笛氏坐标系也称为**直角坐标系**. 从笛氏坐标 (x_i) 到笛氏坐标 $(x_{i'})$ 的转换法则是

$$x_{i'} = A_{i'i}x_i + A_{i'} \text{ 或 } x_{i'} = A_{i'i}x_i, \tag{8}$$

其中 $[A_{i'i}]$ 是正交矩阵.

§4 张 量 场

4.1 定义 定义在开集 $\mathscr{U} \subset \mathbf{E}$ 的**张量场** $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个函数，它在每点 $x \in \mathscr{U}$ 上的值是一个同类型的张量

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(x)\boldsymbol{g}_{i_1}(x)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}(x)\otimes\boldsymbol{g}^{j_1}(x)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}(x). \tag{1}$$

如果点 x 的仿射坐标是 (x^i)，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 在典则基上的各分量 $\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ 是 n 元 (x^i) 的实值函数. 张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 称为 C^∞ 或光滑的，如果 $\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ 在 $\mathscr{U}$ 上是 (x^i) 的 C^∞ 函数(C^N 表示 N 次连续可微). □

为简单计，今后只讨论光滑张量场. 我们将用 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示张量场(作为整体)，而 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 则表示场 $\boldsymbol{\Phi}$ 在点 x 的值. 用 $\mathscr{F}(\mathscr{U})$ 表示 $\mathscr{U}$ 上的 C^∞ 函数的全体，而 $\mathscr{X}(\mathscr{U})$ 表示 $\mathscr{U}$ 上的全体光滑向量场.

各 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是在不同切空间 $T_x\mathbf{E}$ 的张量空间 $\mathscr{T}_{r+s}(T_x\mathbf{E})$ 的元素——多重线性函数:

$$\boldsymbol{\Phi}(x)(\cdots, \alpha\boldsymbol{u}(x) + \beta\boldsymbol{v}(x), \cdots) = \alpha\boldsymbol{\Phi}(x)(\cdots, \boldsymbol{u}(x), \cdots) + \beta\boldsymbol{\Phi}(x)(\cdots, \boldsymbol{v}(x), \cdots), \forall\alpha, \beta \in \mathbf{R};$$
$$\boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{v}(x) \in T_x\mathbf{E}.$$

在上式，对不同的点 x，α 和 β 可以取不同的值. 为了总在光滑场的范围内讨论问题，我们可以取 α, β 是任意 $f, g \in \mathscr{F}(\mathscr{U})$ 在点 x 上的值，而 $\boldsymbol{u}(x)$ 和 $\boldsymbol{v}(x)$ 则是任意 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathscr{U})$ 在点 x 上的值. 于是我们有

$$\boldsymbol{\Phi}(\cdots, f\boldsymbol{u} + g\boldsymbol{v}, \cdots) = f\boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{u}, \cdots) + g\boldsymbol{\Phi}(\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots),$$
$$\forall f, g \in \mathscr{F}(\mathscr{U}); \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathscr{U}). \tag{2}$$

我们称张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $\mathscr{F}(\mathscr{U})$-多重线性的. 只要记住张量场是在 $\mathscr{U}$ 上逐点定义的(加上光滑性),我们就可以把张量代数的各种定义和结论推广至张量场. 可以将作用在不同点的张量平行移动到一个共同点,然后进行代数运算,甚至进行像张量函数那样的求导数和微分. 后者使我们可以得到张量场随点而异的变化率，从而由内积空间的张量代数进入欧氏点空间绝对微分学的领域.

§5 曲线及其速度向量

设 $C: I\subset \mathbf{R}\to \mathbf{E}: t\longmapsto x(t)$ 是在 $\mathbf{E}$ 过点 x 的光滑曲线. 点 x 的仿射坐标是 $x^i(t)$（对某个确定的 t）. 今在 C 上另取一点 y，仿射坐标为 $x^i(t+\Delta t)$，则在点 x 有切向量 $(x, y)\in T_x\mathbf{E}$，它在 $\mathscr{V}$ 的象是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(x, y) &= \boldsymbol{d}(x, O)+\boldsymbol{d}(O, y)=\boldsymbol{d}(O, y)-\boldsymbol{d}(O, x)\\ &=(x^i(t+\Delta t)-x^i(t))\mathring{\boldsymbol{g}}_i.\end{aligned}$$

以 Δt 除上式两端,取极限,再映射回 $T_x\boldsymbol{E}$，得 C 在点 x 的**速度向量**

$$\dot{x}:=\boldsymbol{d}_x^{-1}\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{d}(x, y)}{\Delta t}\right)=\boldsymbol{d}_x^{-1}\left(\frac{dx^i}{dt}\mathring{\boldsymbol{g}}_i\right)=\dot{x}^i(t)\boldsymbol{g}_i(x), \quad (1)$$

其中$(\dot{\ })=\dfrac{d}{dt}(\ \ )$. 可见,$C$ 在点 x 的速度向量在典则基上的分量就是仿射坐标对曲线参量 t 的导数. 如果理解 C 是动点 x 在 $\mathbf{E}$ 的运动轨迹， t 是时间，则 $\dot{x}$ 就是名符其实的动点 x 的速度向量. 沿同一曲线 C，动点 x 的运动速率可以是不同的. 这相当于参量 t 换为 $t'=t'(t)$. 这时就有 $C: t'\longmapsto x(t(t'))$，相应的速度向量是

$$\frac{dx}{dt'}=\frac{dx^i}{dt'}\boldsymbol{g}_i(x)=\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{dt'}\boldsymbol{g}_i(x)=\frac{dt}{dt'}\dot{x}. \qquad (2)$$

可见,参量的改变只改变速度向量的长度,而不改变其方向. 速度向量总是切于曲线 C. 另一方面，在点 x 具有相同切向量的曲线不止一条,它们构成一个等价类,记为 $[C]$,

§6 张量场的绝对微分和梯度

设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $\mathscr{U}$ 上的 $r+s$ 阶张量场. 像 §4 最后所说，把包含固定点 x 的邻域的各点 $x+\boldsymbol{u}$ 上的张量 $\boldsymbol{\Phi}(x+\boldsymbol{u})$ 平行移动至点 x，我们就得到在 $T_x\mathrm{E}$ 上的张量值函数 $\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\Phi}(x+\boldsymbol{u})$，其自变量是 $\boldsymbol{u}\in T_x\mathrm{E}$. 求这个函数在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ 上的微分，就得

6.1 定义 张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 在点 x 在 $\boldsymbol{u}\in T_x\mathrm{E}$上的绝对微分定义为

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u}):=\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+s\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\Phi}(x)}{s}$$

$$=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+s\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u}))|_{s=0}. \square \qquad (1)$$

从定义可以看出，$D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u})$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是同型的张量.

6.2 定理 张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 在点 x 在 $\boldsymbol{u}$ 上的绝对微分线性依赖于 $\boldsymbol{u}$. 因而，根据第IV章引理 7.3，存在比 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 高一阶的张量 $(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)$ 或 $(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi})(x)$，使得它们右或左点乘 $\boldsymbol{u}$ 后给出绝对微分：

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi})(x). \qquad (2)$$

证明 只要通过计算即可证明线性依赖性. $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in T_x\mathrm{E}$,

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+s(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})}\boldsymbol{\Phi}(x+s(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}))-\boldsymbol{\Phi}(x)}{s}$$

$$=\alpha\lim_{s\to 0}[\boldsymbol{D}_{x+s\beta\boldsymbol{v}}^{-1}\boldsymbol{D}_{x+s\beta\boldsymbol{v}+\alpha s\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\Phi}(x+s\beta\boldsymbol{v}+\alpha s\boldsymbol{u})$$

$$-\boldsymbol{D}_{x+s\beta\boldsymbol{v}}^{-1}\boldsymbol{D}_{x+s\beta\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\Phi}(x+s\beta\boldsymbol{v})]/\alpha s$$

$$+\beta\lim_{s\to 0}\times\frac{\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+s\beta\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\Phi}(x+s\beta\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\Phi}(x)}{\beta s}$$

$$=\alpha D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u})+\beta D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{v}).$$

6.3 定义 对于 $r+s$ 阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$，$r+s+1$ 阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}$ 和 $\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**右**和**左梯度**. “$\otimes\boldsymbol{\nabla}$”和“$\boldsymbol{\nabla}\otimes$”可以看作是对张量场的一种运算. “$\boldsymbol{\nabla}$”称为 **Hamilton 算子**，也有叫“**nabla**”的. $\square$

右和左梯度一般是不相等的

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla \neq \nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}. \tag{3}$$

标量函数 f 是零阶张量场，其右和左梯度相等

$$f\nabla = \nabla f, \tag{4}$$

是一个向量场．相等的根据是内积的对称性：

$$Df(x;\boldsymbol{u}) = (f\nabla)(x)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(f\nabla)(x) = \boldsymbol{u}(\nabla f)(x).$$

对于标量场，梯度运算不用张量积符号"$\otimes$"．

6.4 定理 向量场 $\boldsymbol{v}$ 的右和左梯度是仿射量场 $\boldsymbol{v}\otimes\nabla$ 和 $\nabla\otimes\boldsymbol{v}$，它们互为转置：

$$\nabla\otimes\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\otimes\nabla)^*,\quad \boldsymbol{v}\otimes\nabla = (\nabla\otimes\boldsymbol{v})^*. \tag{5}$$

证明 从下述关系

$$\begin{aligned}D\boldsymbol{v}(x;\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{v}\otimes\nabla)(x)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\otimes\nabla)^*(x)\\ &= \boldsymbol{u}(\nabla\otimes\boldsymbol{v})(x) = (\nabla\otimes\boldsymbol{v})^*(x)\boldsymbol{u},\end{aligned}$$

仿射量转置的性质及 $\boldsymbol{u}$ 的任意性即得 (5).

6.5 定理 右和左梯度运算是线性的，且满足修正的 Leibniz 法则：

(i) $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{R}$ 和同阶的张量场 $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$，有

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla = \alpha(\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla)+\beta(\boldsymbol{\Psi}\otimes\nabla), \tag{6}$$

$$\nabla\otimes(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}+\beta\nabla\otimes\boldsymbol{\Psi}; \tag{7}$$

(ii) 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 分别是 p 和 q 阶张量场，则

$$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla = \mathrm{T}_\sigma((\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla)\otimes\boldsymbol{\Psi})+\boldsymbol{\Phi}\otimes(\boldsymbol{\Psi}\otimes\nabla), \tag{8}$$

$$\nabla\otimes(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}) = (\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi}+\mathrm{T}_\tau(\boldsymbol{\Phi}\otimes(\nabla\otimes\boldsymbol{\Psi})), \tag{9}$$

其中

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q,i\\ i_1,\cdots,i_p,i,j_1,\cdots,j_q\end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} i,i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\\ i_1,\cdots,i_p,i,j_1,\cdots,j_q\end{pmatrix}.$$

证明 应用定义 6.1，考虑到同态扩张是线性算子，我们有

$D(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})(x;\boldsymbol{u})$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{D_x^{-1} D_{x+su}(\alpha \boldsymbol{\Phi} + \beta \boldsymbol{\Psi})(x+su) - (\alpha \boldsymbol{\Phi} + \beta \boldsymbol{\Psi})(x)}{s}$$

$$= \alpha \lim_{s\to 0} \frac{D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Phi}(x+su) - \boldsymbol{\Phi}(x)}{s}$$

$$+ \beta \lim_{s\to 0} \frac{D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Psi}(x+su) - \boldsymbol{\Psi}(x)}{s}$$

$$= \alpha D\boldsymbol{\Phi}(x; \boldsymbol{u}) + \beta D\boldsymbol{\Psi}(x; \boldsymbol{u}). \tag{10}$$

利用(2)，由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性，就得(6)和(7)。现证(ii)。由于

$D(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(x; \boldsymbol{u})$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{D_x^{-1} D_{x+su}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(x+su) - (\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(x)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} [(D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Phi}(x+su)) \otimes (D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Psi}(x + su)) - \boldsymbol{\Phi}(x) \otimes (D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Psi}(x+su))]/s$$

$$+ \lim_{s\to 0} \frac{\boldsymbol{\Phi}(x) \otimes (D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Psi}(x+su)) - \boldsymbol{\Phi}(x) \otimes \boldsymbol{\Psi}(x)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \left[\frac{D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Phi}(x+su) - \boldsymbol{\Phi}(x)}{s} \otimes (D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Psi}(x+su)) \right]$$

$$+ \boldsymbol{\Phi}(x) \otimes \lim_{s\to 0} \frac{D_x^{-1} D_{x+su} \boldsymbol{\Psi}(x+su) - \boldsymbol{\Psi}(x)}{s}$$

$$= D\boldsymbol{\Phi}(x; \boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{\Psi}(x) + \boldsymbol{\Phi}(x) \otimes D\boldsymbol{\Psi}(x; \boldsymbol{u}). \tag{11}$$

利用(2)，$\forall \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{u} \in T_x\mathrm{E}$，上式给出

$$((\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}^i)$$
$$= (((\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q)$$
$$= (((\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)\boldsymbol{u})\otimes\boldsymbol{\Psi}(x) + \boldsymbol{\Phi}(x)\otimes((\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)\boldsymbol{u}))$$
$$\times (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q) = ((\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)(\boldsymbol{u}_1, \cdots,$$
$$\times \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{\Psi}(x)(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q) + \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p)$$
$$\times (\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{g}_i))\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}^i)$$
$$= ((((\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})\otimes\boldsymbol{\Psi})(x)(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q)$$
$$+ (\boldsymbol{\Phi}\otimes(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\nabla}))(x)(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{g}_i))$$
$$\times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}^i) = (\mathrm{T}_\sigma((\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})\otimes\boldsymbol{\Psi})(x) + (\boldsymbol{\Phi}\otimes(\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\nabla}))$$

$$\times (x))(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q, g_i)a(g^i),$$

从而

$$((\Phi\otimes\Psi)\otimes\nabla)(x)u = (\mathrm{T}_\sigma((\Phi\otimes\nabla)\otimes\Psi) + \Phi\otimes(\Psi\otimes\nabla))(x)u,$$

由此即得 (8). (9) 式亦可类似地证明. □

设 $\mathring{I}\in\mathscr{T}_2(\mathscr{V})$ 是单位仿射量，$\mathring{u}$, $\mathring{v}\in\mathscr{V}$，记 $u = d_x^{-1}\mathring{u}$, $v = d_x^{-1}\mathring{v}$，则 $\forall x\in \mathbf{E}$, $\mathring{I}$的同态扩张 $D_x^{-1}\mathring{I}$ 由下式定义

$$\mathring{I}(\mathring{u}, \mathring{v}) = D_x^{-1}\mathring{I}(d_x^{-1}\mathring{u}, d_x^{-1}\mathring{v}) = D_x^{-1}\mathring{I}(u, v). \quad (12)$$

另一方面，根据 E 的内积定义，有

$$\begin{aligned}\mathring{I}(\mathring{u}, \mathring{v}) &= \mathring{u}\mathring{I}\mathring{v} = \mathring{u}\mathring{v} = (d_x^{-1}\mathring{u})(d_x^{-1}\mathring{v}) \\ &= uv = uIv = I(u, v).\end{aligned} \quad (13)$$

比较 (12) 和 (13)，由 u, v 的任意性(因 $\mathring{u}$, $\mathring{v}$ 为任意，而 d_x^{-1} 是同构映射)，可知单位自由仿射量 $\mathring{I}$诱导出 E 的单位仿射量场，它是一个平行(即均匀)仿射量场. 因此，有

6.6 定理 设 I 是 E 的单位仿射量场，则

$$DI(x;\ u) = O, \quad (14)$$

$$I\otimes\nabla = \nabla\otimes I = O. \ □ \quad (15)$$

根据 Eddington 张量的定义和 (2.13)，我们又得，$\mathscr{V}$ 的自由 Eddington 张量诱导出 E 的 Eddington 张量场 ϵ，它也是一个平行 n-形式场. 因而，

6.7 定理 设 ϵ 是 E 的 Eddington 张量场，则

$$D\epsilon(x;\ u) = O, \quad (16)$$

$$\epsilon\otimes\nabla = \nabla\otimes\epsilon = O. \quad (17)$$

6.8 定理 张量场 Φ 的右和左梯度在典则基上有表示式：

$$\Phi\otimes\nabla = \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\, g_{i_1}\otimes\cdots\otimes g^{j_s}\otimes g^k, \quad (18)$$

$$\nabla\otimes\Phi = \partial_k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\, g^k\otimes g_{i_1}\otimes\cdots\otimes g^{j_s}, \quad (19)$$

其中 "$_{,k}$" 和 "∂_k" 均表示 "$\partial/\partial x^k$".

证明 应用 $(1)_2$ 和同态扩张的性质，对每点 x 有

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\ \boldsymbol{u}) = \frac{d}{ds}\left(\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+su}(\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(x^i + su^i)\boldsymbol{g}_{i_1}(x^j\right.$$

$$\left. + su^j)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}(x^k + su^k))\right)\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(x^k + su^k)\right)\Big|_{s=0}\boldsymbol{g}_{i_1}(x)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}(x)$$

$$= \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}(x)u^k\boldsymbol{g}_{i_1}(x)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}(x)$$

$$= (\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}(x)\boldsymbol{g}_{i_1}(x)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}(x)\otimes\boldsymbol{g}^k(x))$$

$$\times (u^j\boldsymbol{g}_j(x)) = (u^j\boldsymbol{g}_j(x))(\partial_k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}^k(x)$$

$$\otimes\ \boldsymbol{g}_{i_1}(x)\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}(x)).$$

由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性,和(2)比较,即得(18)和(19). □

$D\boldsymbol{\Phi}(x;\ \boldsymbol{u})$ 是张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 从点 x 到点 $x+\boldsymbol{u}$ 增量的线性主部。如果 $\boldsymbol{u}$ 是过点 x 的某曲线 C 的速度向量 $\dot{x}$,则 $D\boldsymbol{\Phi}\ (x;\ \dot{x})$ 就是 $\boldsymbol{\Phi}$ 随着动点 x 沿 C 的变化率. 为了求得 $\boldsymbol{\Phi}$ 的绝对微分 $D\boldsymbol{\Phi}\ (x;\ \boldsymbol{u})$,只要将 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右或左梯度,按(2)右或左作用于 $\boldsymbol{u}$. 因此,$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla$ 或 $\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}$ 完全刻划了张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 在各点的变化情况. 从(18)和(19)可以看到,梯度在典则基上的分量就是 $\boldsymbol{\Phi}$ 的相应分量的偏导数.

§7 曲线坐标系和自然局部基

为了适应具体问题区域边界的形状,往往引进曲线坐标系.本节将叙述一般曲线坐标系的理论.为此,先回顾一下直线坐标系的引进.

由于 $\mathbf{E}$ 的欧几里德结构(其实只需仿射空间的结构),存在一个二元组 $(O,\ \{\mathring{g}_i\})$,使得 $x\in\mathbf{E}$ 和 $(x^i)\in\mathbf{R}^n$ 一一对应; $x\sim(x^i)$. 从 $(O,\ \{\mathring{g}_i\})$ 出发,又可得到无穷多个仿射坐标系. 例如,对 $(O',\ \{\mathring{g}_{i'}\})$,满足

$$\mathring{g}_{i'} = A^i_{i'}\mathring{g}_i,\quad \det[A^i_{i'}] \neq 0, \tag{1}$$

又有 $x\sim(x^{i'})$. 两组坐标的关系是

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}\ \text{或}\ x^i = A^i_{i'}x^{i'} + A^i. \tag{2}$$

这些关系可用下图表示

$$
\begin{array}{ccc}
C(O, \{\mathring{g}_i\}) & \xrightarrow{C} & x \sim (x^i) \\
\Downarrow (1) & & \uparrow (2)_2 \\
C(O', \{\mathring{g}_{i'}\}) & \xrightarrow[C']{} & x \sim (x^{i'})
\end{array}
$$

对于给定的点 $x \in \mathbf{E}$，从 $(O, \{\mathring{g}_i\})$ 到 $x \sim (x^i)$ 可以通过 C 或等价地通过 $((1), C', (2)_2)$。如果将后一过程的方向反过来。从仿射坐标系 $\{x^i\}$ 出发，利用 $(2)_1$，取 $x^{i'} = 0$ 的点作为 O'，求 $[A_i^{i'}]$ 的逆 $[A_{i'}^i]$，从而又有 (1)，于是就得 $(O', \{\mathring{g}_{i'}\})$。它和 $(O, \{\mathring{g}_i\})$ 的关系仍然是 (1)，结果是一致的。关键是首先存在二元组 $(O, \{\mathring{g}_i\})$，并由此而得 $x \sim (x^i)$。

如果在上述的逆过程中，以任意函数

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i) \tag{3}$$

代替仿射变换 $(2)_1$，一般得不到一一对应的关系 $x \sim (x^{i'})$，更谈不上存在对应的二元组，这时 $(x^{i'})$ 就起不到点的标志的作用。但是，如果 (3) 满足某些条件，一一对应的关系还是可以达到的。

7.1 定义 设 $\{x^i\}$ 是仿射坐标系。

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i) \tag{4}$$

是在某连通区域 $\mathscr{U} \subset \mathbf{E}$ 内的单值可逆光滑函数。即在 $\mathscr{U}$ 内存在反函数

$$x^i = x^i(x^{i'}). \tag{5}$$

并且也是单值和光滑的。这时在整个区域内

$$\det\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right] \neq 0, \quad \det\left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right] \neq 0. \tag{6}$$

若 (4) 不退化为仿射变换，则 $(x^{i'})$ 称为点 x 的**曲线坐标**，并说，(4) 在 $\mathscr{U}$ 定义了一个**曲线坐标系**。□

这时，如果只变动一个坐标 $x^{i'}$，则所有这些点在 $\mathbf{E}$ 的轨迹一般不再是直线，而是一条曲线，称为 $x^{i'}$——**坐标线**。当然，不排除某些坐标线仍然是直线。

如果在每 $T_x\mathbf{E}$ 取由某 $\{\mathring{g}_{i'}\}$ 诱导出来的典则基，则我们没

有发挥曲线坐标系的作用而回到仿射坐标系。因此，必须选择与曲线坐标系相对应的基。

7.2 定义 设 $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$ 是 $T_x\mathrm{E}$ 的典则基，则

$$\{\boldsymbol{g}_{i'}(x) \mid \boldsymbol{g}_{i'}(x) = A^i_{i'}(x)\boldsymbol{g}_i(x)\} \tag{7}$$

称为曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$ 的**自然局部基**，其中

$$A^i_{i'}(x) := \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\bigg|_x \quad \text{及} \quad A^{i'}_i(x) := \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\bigg|_x. \ \square \tag{8}$$

曲线坐标系唯一确定自然局部基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}(x)\}$. 由于转换系数(8)随点而异，各点局部基相同编号的基向量已一般不再平行，因而不能统一地由一个二元组来诱导。公式(7)直接给出自然局部基基向量的几何意义：$\boldsymbol{g}_{i'}(x)$ 是 $x^{i'}$——坐标曲线

$$x^{i'}:\mathrm{R} \to \mathrm{E}: x^{i'} \longmapsto x(x^{i'}) \tag{9}$$

在点 x 的速度向量(以坐标 $x^{i'}$ 作为参量 t)

$$\boldsymbol{g}_{i'}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(x)\boldsymbol{g}_i(x). \tag{10}$$

另一种（经典的）几何意义是：$\boldsymbol{g}_{i'}(x)$ 是沿 $x^{i'}$——坐标曲线向

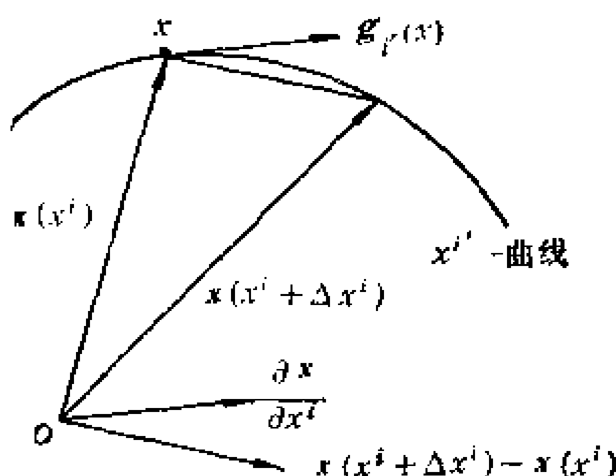


图 2

径 $\boldsymbol{x} = (O, x)$ 对该坐标的偏导数。在本书的体系，这个偏导数是作用在原点 O 的向量，还应平行移动至点 x 才得(图 2)

$$\boldsymbol{g}_{i'}(x) = \boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{i'}} = \boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o \frac{\partial (x^i \boldsymbol{g}_i(O))}{\partial x^{i'}}$$

$$= \boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\ \boldsymbol{g}_i(O)\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\ (x)\boldsymbol{g}_i(x).$$

设

$$x^{i''} = x^{i''}(x^i), \quad \det\left[\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\right] \neq 0 \qquad (11)$$

定义另一曲线坐标系 $\{x^{i''}\}$，则将(5)代人(11)，可得两曲线坐标的关系

$$x^{i''} = x^{i''}(x^{i'}), \quad \det\left[\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\right] \neq 0. \qquad (12)$$

$\{x^{i''}\}$ 的自然局部基的基向量为

$$\boldsymbol{g}_{i''}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}}\ (x)\boldsymbol{g}_i(x) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\ \boldsymbol{g}_i(x)$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\ (x)\boldsymbol{g}_{i'}(x). \qquad (13)$$

可见，任意两曲线坐标系的自然局部基的转换关系仍为

$$\boldsymbol{g}_{i''} = A^{i'}_{i''}\boldsymbol{g}_{i'}, \quad A^{i'}_{i''} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}. \qquad (14)$$

作为 $T_x\mathrm{E}$ 的基，$\{\boldsymbol{g}_{i'}(x)\}$ 诱导出逆变基 $\{\boldsymbol{g}^{i'}(x)\}$ 和度量张量的协变和逆变分量

$$g_{i'j'}(x) = \boldsymbol{g}_{i'}(x)\boldsymbol{g}_{j'}(x), \quad g^{i'j'}(x) = \boldsymbol{g}^{i'}(x)\boldsymbol{g}^{j'}(x). \qquad (15)$$

它们也都随点而异。

只要应用(5.1)和(10)，在 $\{x^{i'}\}$ 里，可得曲线 $C: t \longmapsto x^{i'}(x^i(t))$ 或 $t \longmapsto x^i(x^{i'}(t))$ 在点 x 的速度向量的表达式

$$\dot{x} = \dot{x}^i(t)\boldsymbol{g}_i(x) = \dot{x}^{i'}(t)\ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\ \boldsymbol{g}_i(x) = \dot{x}^{i'}(t)\boldsymbol{g}_{i'}(x). \qquad (16)$$

它和对仿射坐标系导出的(5.1)形式相同：不管什么坐标系，只要将坐标对参量 t 求导数，就得速度向量在自然局部基的分量(典则基可以看作一种特殊的局部基)。

例. E^2 的极坐标系 $\{r = x^{1'}, \theta = x^{2'}\}$ 的自然局部基和度量张量.

取笛氏坐标系 $\{x = x^1, y = x^2\}$，其典则基是 $\{\boldsymbol{g}_1(x) /\!/ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{g}_2(x) /\!/ \boldsymbol{j}\}$，其中 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ 是坐标原点切空间的标准正交基. 极坐标和笛氏坐标的变换公式 $x^i = x^i(x^{i'})$ 是

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{17}$$

这时

$$[A^i_{i'}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

根据(7)和(15)式，有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{g}_{1'} &= A^1_{1'}\boldsymbol{g}_1 + A^2_{1'}\boldsymbol{g}_2 = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{g}_{2'} &= A^1_{2'}\boldsymbol{g}_1 = A^2_{2'}\boldsymbol{g}_2 = r(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$[g_{i'j'}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad [g^{i'j'}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

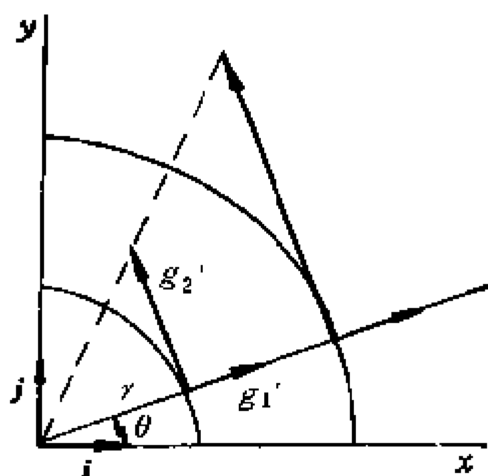


图 3

(18)的最后等式有和本书体系不一致之处，但适应通常的直观写法. 可以看到，对应于 r-曲线的基向量 $\boldsymbol{g}_{1'}$ 与 r 无关，而 θ-曲线的基向量 $\boldsymbol{g}_{2'}$ 的长度和 r 成正比(等于 r，见图 3).

§8 协变导数，联络系数和 Christoffel 符号

在曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$，将张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 在每点的值 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 在该点的自然局部基上分解，整体地仍有表示式

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{i'_1\cdots i'_s}\boldsymbol{g}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i'_s}. \tag{1}$$

现在问题是：张量分析中的基本量——张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}$ 和$\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\{x^{i'}\}$ 如何表达。

8.1 定理 设在 E 有仿射坐标系 $\{x^i\}$，则在曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$ 里，(1) 式的张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的右和左梯度的表达式是

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{i'_1\cdots i'_s;k'}\boldsymbol{g}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i'_s}\otimes\boldsymbol{g}^{k'} \tag{2}$$

和

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla_{k'}\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{i'_1\cdots i'_s}\boldsymbol{g}^{k'}\otimes\boldsymbol{g}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i'_s}, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{i'_1\cdots i'_s;k'} &= \nabla_{k'}\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{i'_1\cdots i'_s}\\ &= \Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{i'_1\cdots i'_s,k'} + \sum_{p=1}^{r}\Gamma^{i'_p}_{k'm'}\Phi^{\cdots m'\cdots}{}_{i'_1\cdots i'_s}\\ &\quad - \sum_{q=1}^{s}\Gamma^{n'}_{k'i'_q}\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{\cdots n'\cdots}\end{aligned} \tag{4}$$

和

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} \tag{5}$$

分别和为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**协变导数**和曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$ 的**联络系数**. □

有如 $\partial_i(\quad)\equiv(\quad)_{,i}$，上面用到了 $\nabla_{k'}(\quad)\equiv(\quad)_{;k'}$.

证明 为简单计，只对二阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i'}_{j'}\boldsymbol{g}_{i'}\otimes\boldsymbol{g}^{j'}$ 进行证明。类似于定理 6.8 的证明，$\forall x\in\mathscr{U}$，有

$$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(x)\boldsymbol{u}=\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+su}\boldsymbol{\Phi}(x+su)-\boldsymbol{\Phi}(x)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}[\Phi^{i'}{}_{j'}(x+s\boldsymbol{u})\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+su}(\boldsymbol{g}_{i'}(x+s\boldsymbol{u})\otimes\boldsymbol{g}^{j'}(x+s\boldsymbol{u}))$$

$$-\Phi^{i'}{}_{j'}(x)\boldsymbol{g}_{i'}(x)\otimes\boldsymbol{g}^{j'}(x)]/s$$

$$=\lim_{s\to 0}\left[\left(\Phi^{i'}{}_{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right)(x+s\boldsymbol{u})\boldsymbol{D}_x^{-1}\boldsymbol{D}_{x+su}(\boldsymbol{g}_i(x+s\boldsymbol{u})\right.$$

$$\otimes\boldsymbol{g}^j(x+s\boldsymbol{u})-\left(\Phi^{i'}{}_{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right)$$

$$\left.\times(x)\boldsymbol{g}_i(x)\otimes\boldsymbol{g}^j(x)\right]\Big/s$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(\Phi^{i'}{}_{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right)(x+s\boldsymbol{u})-\left(\Phi^{i'}{}_{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right)(x)}{s}$$

$$\times\boldsymbol{g}_i(x)\otimes\boldsymbol{g}^j(x)$$

$$=\left(\Phi^{i'}{}_{j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right)_{,k'}(x)u^{k'}\boldsymbol{g}_i(x)\otimes\boldsymbol{g}^j(x)$$

$$=\left(\left(\Phi^{r'}{}_{s'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\right)_{,k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)(x)u^{k'}\boldsymbol{g}_{i'}(x)\otimes\boldsymbol{g}^{j'}(x).$$

由此得

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}=\left(\Phi^{r'}{}_{s'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\right)_{,k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\boldsymbol{g}_{i'}\otimes\boldsymbol{g}^{j'}\otimes\boldsymbol{g}^{k'}. \quad (6)$$

考虑到

$$0=\frac{\partial}{\partial x^{k'}}(\delta^{s'}_{j'})=\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)=\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}$$

$$+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\right),$$

$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}$ 的分量可改写为

$$\left(\Phi^{r'}{}_{s'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\right)_{,k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}=\left[\Phi^{r'}{}_{s',k'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\right.$$

$$\left.+\Phi^{r'}{}_{s'}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{r'}}+\Phi^{r'}{}_{s'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{r'}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\right)\right]$$

$$\times \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \Phi^{i'}{}_{j',k} + \Phi^{r'}{}_{j'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{r'}}$$

$$- \Phi^{i'}{}_{s'}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}. \tag{7}$$

引进联络系数 (5)，并称 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}$ 的分量为**协变导数** (4)，得

$$\Phi^{i'}{}_{j',k'} \equiv \Phi^{i'}{}_{j',k'} + \Gamma^{i'}_{k'r'}\Phi^{r'}{}_{j'} - \Gamma^{s'}_{k'j'}\Phi^{i'}{}_{s'}. \tag{8}$$

于是,我们有

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \Phi^{i'}{}_{j',k'}\boldsymbol{g}_{i'}\otimes\boldsymbol{g}^{j'}\otimes\boldsymbol{g}^{k'}. \tag{9}$$

类似地也有

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla_{k'}\Phi^{i'}{}_{j'}\boldsymbol{g}^{k'}\otimes\boldsymbol{g}_{i'}\otimes\boldsymbol{g}^{j'}. \tag{10}$$

对于一般的张量场,用同法可得 (2) 和 (3). □

从 (5) 可知,联络系数关于两下标为对称

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^{i'}_{k'j'}. \tag{11}$$

我们注意到，张量场梯度或协变导数的定义没有用到空间的度量性质(内积)。

如果 $\{x^{i'}\}$ 也是仿射坐标系,则 $x^i = x^i(x^{i'})$ 是仿射变换. 这时, (5) 中的二阶导数为零，从而所有联络系数消失, (4) 右端只余下第一项,即协变导数退化为偏导数. 因此, (2) 和 (3) 式是普适的,对于包括仿射坐标系在内的一切坐标系有效.

当 $\boldsymbol{\Phi}$ 是平行张量场，则按定义 $D\boldsymbol{\Phi}(x;\ \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O},\ \forall x \in \mathscr{U}$; $\boldsymbol{u} \in T_x\mathbf{E}$. 由此得 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{O}$, 即 $\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s;k'} = 0$. 在仿射坐标系,平行场的各分量相等,即各偏导数 $\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k} = 0$. 在曲线坐标系里, $\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s,k'} = 0$ 并无几何意义,分量相等不意味 $\boldsymbol{\Phi}$ 是平行场,因协变导数表达式还包含反映坐标系性质的联络系数 $\Gamma^{i'}_{j'k'}$. 因此,从分量上看,判断张量场的平行性, $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ 起重要作用，起联络各点的量的作用,故称为联络系数.

在仿射坐标系,偏导数是一种几何运算,即作用在张量分量的结果仍是张量分量. 但在一般坐标系(包括曲线和直线)，协变微商才是几何运算. $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla}$ 的分量是 $\boldsymbol{\Phi}$ 的分量的协变导数，既然

是张量分量，就可以通过"指标游戏"形式地定义"**逆变导数**"：

$$\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s}{}^{;k'} = \nabla^{k'}\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s} := \Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s;l'}g^{l'k'}. \tag{12}$$

从而我们有

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla = \Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s}{}^{;k'}\boldsymbol{g}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j'_s}\otimes\boldsymbol{g}_{k'}, \tag{13}$$

$$\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla^{k'}\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s}\boldsymbol{g}_{k'}\otimes\boldsymbol{g}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j'_s}. \tag{14}$$

如果再考虑另一个曲线坐标系 $\{x^{i''}\}$，则下述定理给出两曲线坐标系的联络系数的转换法则。

8.2 定理 从曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$ 到曲线坐标系 $\{x^{i''}\}$，联络系数的转换法则是

$$\Gamma^{i''}_{j''k''} = A^{i''}_{i'}A^{j'}_{j''}A^{k'}_{k''}\Gamma^{i'}_{j'k'} + A^{i''}_{i'}\partial_{j''}A^{i'}_{k''} \tag{15}$$

$$= A^{i''}_{i'}A^{j'}_{j''}A^{k'}_{k''}\Gamma^{i'}_{j'k'} - A^{j'}_{j''}A^{k'}_{k''}\partial_{j'}A^{i''}_{k'}, \tag{16}$$

其中

$$A^{i''}_{i'} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}, \quad A^{i'}_{i''} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}. \tag{17}$$

可见，联络系数不是张量场的分量.

证明 把 $x^{i''} = x^{i''}(x^{i'}) = x^{i''}(x^{i'}(x^{i}))$ 作为复合函数，按定义，有

$$\Gamma^{i''}_{j''k''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right) + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}$$

$$\times\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}.$$

考虑到(17)和 $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{k'}} = \delta^{i'}_{k'}$，即得(15). 又考虑到

$$0 = \partial_{j'}(\delta^{i'}_{p'}) = \partial_{j'}(A^{k''}_{p'}A^{i'}_{k''}) = \partial_{j'}A^{k''}_{p'}A^{i'}_{k''} + A^{k''}_{p'}\partial_{j'}A^{i'}_{k''},$$

$$\partial_{j'}A^{i'}_{k''} = -A^{k'}_{k''}A^{i'}_{p''}\partial_{j'}A^{p''}_{k'},$$

(15)式右端第二项可化成

$$A^{i''}_{i'}\partial_{j''}A^{i'}_{k''} = A^{i''}_{i'}A^{j'}_{j''}\partial_{j'}A^{i'}_{k''} = -A^{i''}_{i'}A^{j'}_{j''}A^{p'}_{k''}A^{i'}_{q''}\partial_{j'}A^{q''}_{p'}.$$

此即 (16) 式的第二项. □

虽然联络系数的定义与度量无关，但是,空间一旦引进内积，则联络系数就完全由度量张量所确定。

8.3 定义 设 $\{x^{i'}\}$ 是 **E** 的曲线坐标系，在自然局部基下,其度量张量的协变分量是 $g_{i'j'}$. **第一类 Christoffel 符号**定义为

$$\Gamma_{i'j'k'} = \frac{1}{2}(g_{j'k',i'} + g_{k'i',j'} - g_{i'j',k'}). \tag{18}$$

8.4 定理 联络系数可由度量张量分量表达，并称为**第二类 Christoffel 符号**:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{1}{2}g^{k'p'}(g_{j'p',i'} + g_{p'i',j'} - g_{i'j',p'}) = g^{k'p'}\Gamma_{i'j'p'}. \tag{19}$$

于是也有

$$\Gamma_{i'j'k'} = g_{k'p'}\Gamma^{p'}_{i'j'}. \ \square \tag{20}$$

从 (20) 可以看到，由于 $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ 不是张量分量，$\Gamma_{i'j'k'}$ 也不是张量分量.

证明 设在仿射坐标系 $\{x^i\}$ 下的度量张量协变分量为 $g_{ij}=$ const.，则

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \tag{21}$$

从 (5) 得

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}. \tag{22}$$

将 (21) 对 $x^{k'}$ 求导，并利用 (22)，我们有

$$\begin{aligned}
g_{i'j',k'} &= g_{ij}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) \\
&= g_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}\Gamma^{p'}_{k'i'}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{p'}}\Gamma^{p'}_{k'j'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) \\
&= g_{p'j'}\Gamma^{p'}_{k'i'} + g_{p'i'}\Gamma^{p'}_{k'j'}.
\end{aligned}$$

将上式指标轮换 $i'\to j'\to k'\to i'$，并将上式变号,得

$$-g_{i'j',k'} = -g_{p'j'}\Gamma^{p'}_{k'i'} - g_{p'i'}\Gamma^{p'}_{k'j'},$$
$$g_{j'k',i'} = g_{p'k'}\Gamma^{p'}_{i'j'} + g_{p'j'}\Gamma^{p'}_{i'k'},$$
$$g_{k'i',j'} = g_{p'i'}\Gamma^{p'}_{j'k'} + g_{p'k'}\Gamma^{p'}_{i'j'}.$$

三式相加，考虑到联络系数的对称性，得

$$g_{k'p'}\Gamma^{p'}_{i'j'} = \frac{1}{2}(g_{j'k',i'} + g_{k'i',j'} - g_{i'j',k'}) = \Gamma_{i'j'k'}.$$

将指标 k' 提升，就得 (19)。

8.5 命题 第一、二类 Christoffel 符号有几何意义：它们分别是点 x 向径 $\boldsymbol{x}$ 对曲线坐标的二阶偏导数平移至点 x 后在逆变和协变基上的分解系数。

$$\Gamma_{i'j'k'}(x) = \boldsymbol{g}_{k'}(x)\left(\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right), \tag{23}$$

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}(x) = \boldsymbol{g}^{k'}(x)\left(\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right). \tag{24}$$

证明 计算上述二阶偏导数

$$\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} = \boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\frac{\partial^2(x^i\boldsymbol{g}_i(O))}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\boldsymbol{g}_i(O)$$

$$= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\boldsymbol{g}_i(x) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_{l'}(x). \tag{25}$$

以 $\boldsymbol{g}^{k'}(x)$ 点乘上式两端，即得 (24)。根据 (20)，又得 (23)

$$\Gamma_{i'j'k'}(x) = g_{k'p'}(x)\Gamma^{p'}_{i'j'}(x) = g_{k'p'}\boldsymbol{g}^{p'}(x)\left(\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right)$$

$$= \boldsymbol{g}_{k'}(x)\left(\boldsymbol{d}_x^{-1}\boldsymbol{d}_o\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right). \quad \square$$

下面为了书写简单，$\{x^i\}$ 表示曲线坐标系。

8.6 推论 协变(逆变)微商是线性运算，且满足 Leibniz 法则：

(i) $(\alpha\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} + \beta\Psi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})_{;k} = \alpha\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k} + \beta\Psi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}$, (26)

(ii) $(\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_q})_{;k} = \Phi^{i_1\cdots i_p}{}_{;k}\Psi_{j_1\cdots j_q} + \Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_q;k}$. (27)

证明 本推论是定理 6.5 的分量表现。也可直接用协变导数

的一般公式 (4) 进行证明.

8.7 命题 缩并和协变微商的次序可交换.

证明 为简单计,在 (27) 中取 $p=2, q=1$, 得

$$(\varphi^{ik}\psi_p)_{;i}=\varphi^{ik}{}_{;i}\psi_p+\varphi^{ik}\psi_{p;i}.$$

将上式右端对指标 k, p 进行缩并,得

$$\varphi^{ir}{}_{;i}\psi_r+\varphi^{ir}\psi_{r;i}. \tag{28}$$

现先进行缩并,然后进行协变微商

$$\begin{aligned}(\varphi^{ir}\psi_r)_{;i}&=(\varphi^{ir}\psi_r)_{,i}+\Gamma^i_{is}\varphi^{sr}\psi_r\\&=\varphi^{ir}{}_{,i}\psi_r+\varphi^{ir}\psi_{r,i}+\Gamma^i_{is}\varphi^{sr}\psi_r+\Gamma^r_{is}\varphi^{is}\psi_r-\Gamma^r_{is}\varphi^{is}\psi_r\\&=(\varphi^{ir}{}_{,i}+\Gamma^i_{is}\varphi^{sr}+\Gamma^r_{is}\varphi^{is})\psi_r+\varphi^{ir}(\psi_{r,i}-\Gamma^s_{ir}\psi_s),\end{aligned}$$

结果和 (28) 相同. □

作为定理 6.7 和 6.8 的分量表现 (也可直接用 (4) 证明), 又有

8.8 推论

$$g_{ij;k}=0,\ \delta^i_{j;k}=0,\ g^{ij}{}_{;k}=0\ (\textbf{Ricci 引理}), \tag{29}$$

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n;k}=0,\ \varepsilon^{i_1\cdots i_n}{}_{;k}=0. \ \square \tag{30}$$

这样, 对于协变微商, 度量张量和 Eddington 张量的分量有如常数,可以移进或移出协变微商号内或外,如

$$(g_{ir}\varphi^{rj})_{;k}=g_{ir}\varphi^{rj}{}_{;k}.$$

§9 非完整系

虽然自然局部基直接由曲线坐标系导出, 能适应具体区域边界的形状,但仍有不理想之处,例如在 §7 的例的 $\boldsymbol{g}_{3'}$ 的长度随 r 而变化. 更主要的缺陷是: 并非每基向量都是无量纲的. 上面提及的例的 $\boldsymbol{g}_{1'}$ 是无量纲的,而 $\boldsymbol{g}_{2'}$ 则具有长度量纲. 于是, 一个代表一定物理量的张量在这样的基上的分量并不都具有和该物理量相同的量纲. 这对讨论物理问题是不方便的. 有必要对自然局部基作适当修正,使既能适应引进的曲线坐标系,而且每个基向量是无量纲的. 解决办法是对自然局部基标准化.但这又导致新的问题.

为了处理这新问题，得先讨论一般的非完整系理论。

设 $\{x^i\}$ 是曲线坐标系，$\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是它的自然局部基。设另有曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$：

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \tag{1}$$

它的自然局部基可由(7.13)公式

$$\boldsymbol{g}_{i'}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(x)\boldsymbol{g}_i(x) \tag{2}$$

产生。

现在将这过程反过来：在每点 $x\in\mathscr{U}\subset\mathbf{E}$ 给定一组基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}(x)\}$，即给定函数

$$A^i_{i'} = A^i_{i'}(x), \quad \det[A^i_{i'}] \neq 0, \tag{3}$$

使得

$$\boldsymbol{g}_{i'}(x) = A^i_{i'}(x)\boldsymbol{g}_i(x). \tag{4}$$

问题：是否存在 n 个函数(1)，使得给定的 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$ 就是(1)的自然局部基。问题归结为方程组

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = A^{i'}_i \tag{5}$$

的可积性。

9.1 定义 在每点 $x\in\mathscr{U}\subset\mathbf{E}$ 给定的局部基 $\{\boldsymbol{g}_{i'}(x)\}$ 的全体称为 $\mathscr{U}$ 的一个**完整系**(**holonomic system**)，如果它是某曲线坐标系 $\{x^{i'}\}$ 的自然局部基。否则称为**非完整系**(**anholonomic system**)。□

今后对预先给定的局部基（不论完整与非完整）均用大写指标。根据前面所述和数学分析的常识，显然有下述定理。

9.2 定理 设 $\{x^i\}$ 是曲线坐标系，$\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是它的自然局部基。

$$\{\boldsymbol{g}_I \mid \boldsymbol{g}_I = A^i_I\boldsymbol{g}_i, \quad \det[A^i_I] \neq 0\} \tag{6}$$

是完整系（即存在曲线坐标系 $\{x^I\}$，使得它是该坐标系的自然局部基），当且仅当满足下述条件之一：

(i) 方程组(7)可积：

$$\frac{\partial x^I}{\partial x^i} = A^I_i. \tag{7}$$

(ii) $A^I_i dx^i$ 是全微分．

(iii) $\partial_i A^I_j = \partial_j A^I_i$ 即 $\partial_{[i} A^I_{j]} = 0$. $\quad$ (8)

若 (6) 是完整系，对应的曲线坐标系 $\{x^I\}$ 由线积分

$$x^I(x) = x^I(x_0) + \int_{x_0}^{x} A^I_i dx^i \tag{9}$$

给出，准确到某个点 x_0 的坐标值．□

如果 $\{\boldsymbol{g}_I\}$ 是非完整系，张量场在各点的值仍可就地在各局部基上分解而用分量进行代数运算．例如

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi^I{}_J \boldsymbol{g}_I \otimes \boldsymbol{g}^J = \Phi^i{}_j \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j, \tag{10}$$

$$\Phi^I{}_J = A^I_i A^j{}_J \Phi^i{}_j. \tag{11}$$

问题发生在分析上：如何求 $\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla$ 在 $\{\boldsymbol{g}_I\}$ 的分量表达式．由前面已知，$\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla$ 的分量是协变导数，它包含对坐标的偏导数和联络系数．对于非完整系，不存在坐标系，就谈不上对坐标求导数，联络系数也没有定义．克服这两个困难的关键在于将偏导数的概念进行推广．为此，我们从另一角度进攻这个问题，暂且形式地写

$$\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla = \Phi^I{}_{J;K} \boldsymbol{g}_I \otimes \boldsymbol{g}^J \otimes \boldsymbol{g}^K. \tag{12}$$

$\Phi^I{}_{J;K}$ 既然是张量场的分量，自然满足转换法则：

$$\begin{aligned}\Phi^I{}_{J;K} &= A^I_i A^j{}_J A^k_K \Phi^i{}_{j;k} = A^I_i A^j{}_J A^k_K (\Phi^i{}_{j,k} + \Gamma^i_{kr} \Phi^r{}_j - \Gamma^r_{kj} \Phi^i{}_r) \\ &= A^k_K (A^I_i A^j{}_J \Phi^i{}_j)_{,k} - A^k_K A^j{}_J \partial_k A^I_r \delta^r_m \Phi^m{}_j - A^k_K A^I_i \partial_k A^p_J \Phi^i{}_p \\ &\quad + A^I_i A^j{}_J A^k_K \Gamma^i_{kr} \delta^r_m \Phi^m{}_j - A^I_i A^j{}_J A^k_K \Gamma^r_{kj} \delta^p_r \Phi^i{}_p.\end{aligned} \tag{13}$$

利用

$$0 = \partial_k (A^p_S A^S_j) = \partial_k A^p_S A^S_j + A^p_S \partial_k A^S_j,$$

$$\partial_k A^p_J = A^j{}_J A^S_j \partial_k A^p_S = -A^j{}_J A^p_S \partial_k A^S_j,$$

将 (13) 右端第三项改写为 $+ A^k_K A^I_i A^j{}_J A^p_S \partial_k A^S_j \Phi^i{}_p$．再利用 $\delta^r_m = A^r_R A^R_m$，$\delta^p_r = A^S_r A^p_S$，将 (13) 最终写成

$$\begin{aligned}\Phi^I{}_{J;K} &= \Phi^I{}_{J,k} A^k_K + (A^I_i A^k_K A^r_R \Gamma^i_{kr} - A^k_K A^r_R \partial_k A^I_r) \Phi^R{}_J \\ &\quad - (A^S_r A^k_K A^j{}_J \Gamma^r_{kj} - A^k_K A^j{}_J \partial_k A^S_j) \Phi^I{}_S.\end{aligned} \tag{14}$$

上式括号中的项和联络系数的转换法则 (8.16) 形式相同，而第一项则与偏导数有关．这两事实启发我们引进

9.3 定义 对于非完整系 $\{\boldsymbol{g}_I\}$，算子

$$\partial_I[\text{或}(\ )_{;I}] := A_I^i\partial_i \tag{15}$$

称为 **Pfaff 导数**. □

因为 $\det[A_I^i]\neq 0$，存在逆矩阵 $[A_i^I]$，使得

$$\partial_i = A_i^I\partial_I. \tag{16}$$

设另有非完整系 $\{g_{I'} = A_{I'}^i g_i\}$，则

$$\partial_{I'} = A_{I'}^i\partial_i = A_{I'}^i A_i^I\partial_I = A_{I'}^I\partial_I, \tag{17}$$

其中

$$A_{I'}^I = A_{I'}^i A_i^I,\quad \det[A_{I'}^I]\neq 0. \tag{18}$$

当 $\{\boldsymbol{g}_I\}$ 为完整系时，Pfaff 导数退化为偏导数.

9.4 定义 设 Γ_{jk}^i 是完整系 $\{x^i\}$ 的联络系数.类似于 (8.16)，按公式

$$\Gamma_{JK}^I = A_i^I A_J^j A_K^k \Gamma_{jk}^i - A_J^j A_K^k \partial_j A_k^I \tag{19}$$

定义的 Γ_{JK}^I 称为非完整系 $\{\boldsymbol{g}_I\}$ 的联络系数. □

设另有非完整系 $\{\boldsymbol{g}_{I'}\}$，按

$$\Gamma_{J'K'}^{I'} = A_I^{I'} A_{J'}^J A_{K'}^K \Gamma_{JK}^I - A_{J'}^J A_{K'}^K \partial_J A_K^{I'} \tag{20}$$

构造 $\Gamma_{J'K'}^{I'}$. 将 (15) 和 (19) 代入上式，经过整理，又得

$$\Gamma_{J'K'}^{I'} = A_i^{I'} A_{J'}^j A_{K'}^k \Gamma_{jk}^i - A_{J'}^j A_{K'}^k \partial_j A_k^{I'}. \tag{21}$$

可见，按 (20) 所得的 $\Gamma_{J'K'}^{I'}$ 是 $\{\boldsymbol{g}_{I'}\}$ 的联络系数. 因此，联络系数的转换法则构成群. 有了定义 9.3 和 9.4，从 (14) 就可得

9.5 定理 在非完整系 $\{\boldsymbol{g}_I\}$，张量场 $\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{J_1\cdots J_s}\boldsymbol{g}_{I_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{J_s}$ 的梯度的分量表示式为

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{J_1\cdots J_s;K}\boldsymbol{g}_{I_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{J_s}\otimes\boldsymbol{g}^K, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla_K\Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{J_1\cdots J_s}\boldsymbol{g}^K\otimes\boldsymbol{g}_{I_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{J_s}, \tag{23}$$

其中协变导数

$$\Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{J_1\cdots J_s;K} = \nabla_K\Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{J_1\cdots J_s} = \Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{J_1\cdots J_s,K} + \sum_{p=1}^{r}\Gamma_{KM}^{I_p}\Phi^{\cdots M\cdots}{}_{J_1\cdots J_s}$$

$$-\sum_{q=1}^{s}\Gamma_{KJ_q}^{N}\Phi^{I_1\cdots I_r}{}_{\cdots N\cdots}. \ \square \tag{24}$$

至此问题基本解决. 但有些细节尚需深究. 在完整系里，偏

导数的次序可以交换，联络系数关于下标对称．这些性质在非完整系不再存在．为了讨论这个问题，我们引进一个刻划非完整性的量．

9.6 定义

$$\Omega_{IJ}{}^{K} := A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^K_{j]} \tag{25}$$

称为**非完整对象（或非和乐对象）**（**object of anholonomy**）．□

9.7 定理 $\{\boldsymbol{g}_I\}$ 是完整系 $\Longleftrightarrow \Omega_{IJ}{}^K = 0$．

证明 根据(9)，只需证明 $\Omega_{IJ}{}^K = 0 \Longleftrightarrow \partial_{[i} A^K_{j]} = 0$．(25)式直接给出上述命题的充分性．由于 $\det[A^i_I] \neq 0$，(25)又给出

$$\partial_{[i} A^K_{j]} = A^I_i A^J_j \Omega_{IJ}{}^K, \tag{26}$$

由此就得必要性．

9.8 定理 非完整对象 $\Omega_{IJ}{}^K$ 有性质：

(i) 关于下标为反称

$$\Omega_{JI}{}^K = -\Omega_{IJ}{}^K; \tag{27}$$

(ii) 从 $\{\boldsymbol{g}_I\}$ 到 $\{\boldsymbol{g}_{I'}\}$ 的转换法则是

$$\Omega_{I'J'}{}^K = A^I_{I'} A^J_{J'} A^{K'}_K \Omega_{IJ}{}^K - A^K_{[I'} \partial_{J']} A^{K'}_K, \tag{28}$$

因此，$\Omega_{IJ}{}^K$ 不是张量分量．

证明 只需利用定义 9.6 进行验证．

(i) $\Omega_{JI}{}^K = A^j{}_J A^i_I \partial_{[j} A^K_{i]} = A^i_I A^j{}_J \partial_{[j} A^K_{i]} = -A^i_I A^j{}_J \partial_{[i} A^K_{j]}$

$$= -\Omega_{IJ}{}^K.$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\Omega_{I'J'}{}^{K'} &= A^i_{I'} A^j{}_{J'} \partial_{[i} A^{K'}_{j]} = A^i_{I'} A^j{}_{J'} \partial_{[i}(A^{K'}_{|K|} A^K_{j]}) \\
&= A^i_{I'} A^j{}_{J'}(A^{K'}_K \partial_{[i} A^K_{j]} + (\partial_{[i} A^{K'}_{|K|}) A^K_{j]}) \\
&= A^i_{I'} A^j{}_{J'} A^{K'}_K \partial_{[i} A^K_{j]} + A^i_{I'} A^j{}_{J'} A^K_{[j} \partial_{i]} A^{K'}_K \\
&= A^I_{I'} A^J{}_{J'} A^{K'}_K A^i_I A^j{}_J \partial_{[i} A^K_{j]} - A^i_{I'} A^j{}_{J'} A^K_{[i} \partial_{j]} A^{K'}_K \\
&= A^I_{I'} A^J{}_{J'} A^{K'}_K \Omega_{IJ}{}^K - A^K_{[I'} \partial_{J']} A^{K'}_K.
\end{aligned}$$

9.9 命题

$$\partial_{[I} \partial_{J]} = -\Omega_{IJ}{}^K \partial_K. \tag{29}$$

证明 要用到

$$0 = \partial_i (A^i_K A^K_k) = A^K_k \partial_i A^i_K + A^i_K \partial_i A^K_k,$$

$$\partial_i A^i_J = -A^k_J A^i_K \partial_i A^K_k. \tag{30}$$

计算

$$\partial_I\partial_J = A_I^i\partial_i(A^j_J\partial_j) = A^i_I A^j_J\partial_i\partial_j + A^i_I\partial_i A^j_J\partial_j$$
$$= A^i_I A^j_J\partial_i\partial_j - A^i_I A^k_J(\partial_i A^K_k)A^j_K\partial_j = A^i_I A^j_J\partial_i\partial_j$$
$$- A^i_I A^j_J\partial_i A^K_j\partial_K,$$
$$\partial_{[I}\partial_{J]} = A_{[I}^i A^j_{J]}\partial_i\partial_j - A_{[I}^i A^j_{J]}\partial_i A^K_j\partial_K$$
$$= A^i_I A^j_J\partial_{[i}\partial_{j]} - A^i_I A^j_J\partial_{[i}A^K_{j]}\partial_K = -\Omega_{IJ}{}^K\partial_K,$$

其中考虑到偏导数可交换.

9.10 推论 在非完整系里，Pfaff 导数的次序不可交换:

$$\partial_I\partial_J \neq \partial_J\partial_I \Longleftrightarrow \Omega_{IJ}{}^K \neq 0. \tag{31}$$

9.11 推论 非完整系的联络系数关于下标非对称:

$$\Omega_{IJ}{}^K \neq 0 \Rightarrow \Gamma^K_{[IJ]} \neq 0. \tag{32}$$

证明 将 (19) 式对下标反称化,得

$$\Gamma^K_{[IJ]} = A^K_k A^i_{[I}A^j_{J]}\Gamma^k_{ji} - A^i_{[I}A^j_{J]}\partial_i A^K_j$$
$$= A^K_k A^i_I A^j_J\Gamma^k_{[ij]} - A^i_I A^j_J\partial_{[i}A_{j]}{}^K = -\Omega^K{}_{IJ}, \tag{33}$$

其中用到完整系联络系数的对称性.

§10 正交坐标系和物理标架

正交坐标系是最常用的曲线坐标系，如三维空间的圆柱坐标系,球坐标系等等.

10.1 定义 定义在某开集 $\mathscr{U}\subset\mathbf{E}$ 的曲线坐标系 $\{x^i\}$ 称为**正交的**,如果在每 $x\in\mathscr{U}$ 有

$$g_{ij}(x) = \boldsymbol{g}_i(x)\boldsymbol{g}_j(x) = 0,\ \text{当}\ i\neq j.\ \square \tag{1}$$

这时，每点的自然局部基的基向量相互正交. 度量张量的协变分量矩阵及逆变分量矩阵均为对角阵:

$$[g_{ij}] = \mathrm{diag}(g_{11},\cdots,g_{nn}), \tag{2}$$
$$[g^{ij}] = \mathrm{diag}(g^{11},\cdots,g^{nn}), \tag{3}$$

满足

$$g^{ii} = 1/g_{ii}. \tag{4}$$

正交性使得,用度量张量表达的第一、二类

Christoffel 符号

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\ (g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k}),\tag{5}$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\ g^{kp}(g_{jp,i}+g_{pi,j}-g_{ij,p})=g^{kp}\Gamma_{ijp}.\tag{6}$$

的许多"分量"恒为零。下面利用性质 (2) 分几种情形讨论第一类 Christoffel 符号 (5):

(i) 三个指标均不相同: $\Gamma_{ijk}=0$,

(ii) 两个指标相同。又分三种情形:

1) 第一、二指标相同: $\Gamma_{iij}=-\frac{1}{2}\ g_{ii,j}$, (7)

2) 第一、三指标相同: $\Gamma_{iji}=\frac{1}{2}\ g_{ii,j}$, (8)

3) 第二、三指标相同(根据对称性利用上式):

$$\Gamma_{jii}=\Gamma_{iji}=\frac{1}{2}\ g_{ii,j},\tag{9}$$

(iii) 三个指标相同: $\Gamma_{iii}=\frac{1}{2}\ g_{ii,i}$. (10)

实际上,(8) 式已合并到 (9) 式,而 (10) 式可看作 (9) 式的特殊情形。

性质 (3) 使 (6) 式简化为

$$\Gamma^k_{ij}=g^{kk}\Gamma_{ijk}.\tag{11}$$

下面也分几种情形讨论第二类 Christoffel 符号:

(i) 三个指标均不相同: $\Gamma^k_{ij}=0$,

(ii) 下标相同,但不同于上标: $\Gamma^j_{ii}=-\frac{1}{2}\ g^{jj}g_{ii,j}$, (12)

(iii) 一个或两个下标和上标相同:

$$\Gamma^i_{ij}=\Gamma^i_{ji}=\frac{1}{2}\ g^{ii}\,g_{ii,j}=\frac{1}{2g_{ii}}\ g_{ii,j}=\partial_j\ln\sqrt{g_{ii}}.\tag{13}$$

综合上面的讨论,我们有

10.2 定理 对于正交坐标系,不为零的第一、二类 Christoffel

符号为

$$\Gamma_{iij} = -\frac{1}{2} g_{ii,j}, \quad \Gamma^j_{ii} = -\frac{1}{2} g^{jj} g_{ii,j}, \tag{14}$$

$$\Gamma_{iji} = \Gamma_{jii} = \frac{1}{2} g_{ii,j}, \quad \Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ji} = \partial_j \ln \sqrt{g_{ii}}, \text{（不排除 } j = i\text{）}.$$

□(15)

除了度量张量和 Christoffel 符号有许多为零以外，在正交系的运算与一般曲线坐标系无区别．正交系的自然局部基的基向量还不全是无量纲的单位向量．将正交系和非完整系理论结合起来，就能达到我们的最终目的．

10.3 定义 设正交坐标系 $\{x^i\}$ 的自然局部基是 $\{\boldsymbol{g}_i\}$．引进非完整系，其基向量为

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \frac{\boldsymbol{g}_i}{|\boldsymbol{g}_i|} = \frac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sqrt{g^{ii}} \boldsymbol{g}_i. \tag{16}$$

$\{\boldsymbol{g}_{(i)}\}$ 称为正交系 $\{x^i\}$ 的**物理标架（physical frame）**，它满足

$$\boldsymbol{g}_{(i)} \boldsymbol{g}_{(j)} = \delta_{ij} \quad \text{（标准正交基）}. \ \square \tag{17}$$

应注意的是，不同于笛氏坐标系，$\{\boldsymbol{g}_{(i)}\}$ 在不同点的相同编号的基向量一般不平行．

另一方面，$\{\boldsymbol{g}_{(i)}\}$ 可由 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 通过转换法则得来：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = A^i_{(i)} \boldsymbol{g}_i. \tag{18}$$

和 (16) 比较，可知转换系数矩阵 $[A^i_{(i)}]$ 是对角阵，且

$$A^i_{(i)} = \sqrt{g^{ii}}. \tag{19}$$

逆阵 $[A^{(i)}_i]$ 也是对角的，且

$$A^{(i)}_i = \sqrt{g_{ii}}. \tag{20}$$

现求逆变基 $\{\boldsymbol{g}^{(i)}\}$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}^{(i)} &= A^{(i)}_i \boldsymbol{g}^i = \sqrt{g_{ii}} \boldsymbol{g}^i = \sqrt{g_{ii}} g^{ii} \boldsymbol{g}_i = \sqrt{g_{ii}} g^{ii} \boldsymbol{g}_i \\ &= \sqrt{g^{ii}} \boldsymbol{g}_i = A^i_{(i)} \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_{(i)}. \end{aligned} \tag{21}$$

可见，物理标架的协变基和逆变基重合，协变和逆变的差别消失（只要想到 (17)，这点是容易理解的），本来可以将指标全部下降，

但易和笛氏坐标系混淆．为了强调是物理标架，今将指标全部居中，并用尖括号括起来，求和约定仍然有效．于是

$$\boldsymbol{g}\langle i\rangle \equiv \boldsymbol{g}_{(i)} = \boldsymbol{g}^{(i)},$$

$$g\langle ij\rangle \equiv g_{(i)(j)} = \boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)} = \boldsymbol{g}^{(i)}\boldsymbol{g}^{(j)} = g^{(i)(j)} = \delta^i_j. \tag{22}$$

物理标架 $\{\boldsymbol{g}\langle i\rangle\}$ 是无量纲的单位正交基．任何张量在它上分解的分量具有和该量相同的量纲．这样，任何向量场，仿射量场，…就有表示式：

$$\boldsymbol{u} = u\langle i\rangle\boldsymbol{g}\langle i\rangle, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{T} = T\langle ij\rangle\boldsymbol{g}\langle i\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle j\rangle. \tag{24}$$

既然 $\{\boldsymbol{g}\langle i\rangle\}$ 是一种非完整系，在分析上就有 Pfaff 导数和 Christoffel 符号的表达问题．

(i) Pfaff 导数： $\partial\langle i\rangle = A^i_{(i)}\partial_i = \sqrt{g^{ii}}\partial_i.$ $\quad$ (25)

(ii) Christoffel 符号：因

$$\Gamma^{(k)}_{(i)(j)} = g^{(k)(p)}\Gamma_{(i)(j)(p)} = \delta^{kp}\Gamma_{(i)(j)(p)} = \Gamma_{(i)(j)(k)},$$

Christoffel 符号合成一种，统一地记为

$$\Gamma\langle ijk\rangle \equiv \Gamma^{(k)}_{(i)(j)} = \Gamma_{(i)(j)(k)}. \tag{26}$$

它可以按一般的转换公式(8.16)由 $\{x^i\}$ 的第二类 Christoffel 符号得来：

$$\Gamma\langle ijk\rangle = \Gamma^{(k)}_{(i)(j)} = A^{(k)}_k A^i_{(i)} A^j_{(j)} \Gamma^k_{ij} - A^i_{(i)} A^j_{(j)} \partial_i A^{(k)}_j. \tag{27}$$

由于 $[A^i_{(i)}]$，$[A^{(i)}_i]$ 均为对角阵，当 $(j) \neq (k)$ 时，上式后一项消失而变成

$$\Gamma\langle ijk\rangle = \sqrt{g_{kk}g^{ii}g^{jj}}\, g^{kp}\Gamma_{ijp} = \sqrt{g^{ii}g^{jj}g^{kk}}\,\Gamma_{ijk}. \tag{28}$$

现在利用定理 10.2，分几种情形讨论 $\Gamma\langle ijk\rangle$．

(i) 三个指标均不相同(利用(28))：$\Gamma\langle ijk\rangle = 0.$ $\quad$ (29)

(ii) 三个指标相同(利用(27))：

$$\Gamma\langle iii\rangle = \sqrt{g^{ii}}g^{ii}\cdot\frac{1}{2}g_{ii,i} - g^{ii}\partial_i\sqrt{g_{ii}} = 0. \tag{30}$$

(iii) 两个指标相同．分三种情形(前两情形用(28))：

1) $\Gamma\langle iij\rangle = g^{ii}\sqrt{g^{jj}}\Gamma_{iij} = -\frac{1}{2}g^{ii}\sqrt{g^{jj}}g_{ii,j}$

$$= -\partial\langle j\rangle \ln\sqrt{g_{jj}}. \tag{31}$$

2) $\Gamma\langle iji\rangle = g^{ii}\sqrt{g^{jj}}\Gamma_{iji} = \frac{1}{2}g^{ii}\sqrt{g^{jj}}g_{ii,j}$

$$= \partial\langle j\rangle \ln\sqrt{g_{ii}}. \tag{32}$$

3) $\Gamma\langle jii\rangle = \frac{1}{2}g^{ii}\sqrt{g^{jj}}g_{ii,j} - \sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}}\,\partial_j\sqrt{g_{ii}} = 0.$ (33)

综上可以看出，$\Gamma\langle ijk\rangle$ 作为非完整系的联络系数，关于第一、二指标仍然不对称，并且有

10.4 定理 伴随正交坐标系 $\{x^i\}$ 的物理标架 $\{g\langle i\rangle\}$ 的 Christoffel 符号只有一种 $\Gamma\langle ijk\rangle$，它关于后两指标为反称，不为零的"分量"只有

$$\Gamma\langle iji\rangle = -\Gamma\langle iij\rangle = \partial\langle j\rangle \ln\sqrt{g_{ii}}. \ \square \tag{34}$$

现试求张量场 $\boldsymbol{\Phi} = \Phi\langle ij\rangle\, \boldsymbol{g}\langle i\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle j\rangle$ 梯度 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \Phi\langle ij\rangle;\langle k\rangle \boldsymbol{g}\langle i\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle j\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle k\rangle$ 的分量，协变导数，的表达式

$$\begin{aligned}\Phi\langle ij\rangle;\langle k\rangle &= \Phi^{(i)}{}_{(j);(k)} = \Phi^{(i)}{}_{(j),(k)} + \Gamma^{(i)}_{(k)(r)}\Phi^{(r)}{}_{(j)} - \Gamma^{(r)}_{(k)(j)}\Phi^{(i)}{}_{(r)}\\ &= \Phi\langle ij\rangle,\langle k\rangle + \Gamma\langle kri\rangle\Phi\langle rj\rangle - \Gamma\langle kjr\rangle\Phi\langle ir\rangle\\ &= \Phi\langle ij\rangle,\langle k\rangle + \Gamma\langle kri\rangle\Phi\langle rj\rangle + \Gamma\langle krj\rangle\Phi\langle ir\rangle. \end{aligned} \tag{35}$$

这里用到了 $\Gamma\langle ijk\rangle$ 的反称性. 同法可一般地证明

10.5 定理 在正交系的物理标架 $\{\boldsymbol{g}\langle i\rangle\}$ 里，张量场 $\boldsymbol{\Phi} = \Phi\langle i_1\cdots i_r\rangle \boldsymbol{g}\langle i_1\rangle \otimes\cdots\otimes \boldsymbol{g}\langle i_r\rangle$ 的梯度是

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \Phi\langle i_1\cdots i_r\rangle;\ \langle j\rangle \boldsymbol{g}\langle i_1\rangle \otimes\cdots\otimes \boldsymbol{g}\langle i_r\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle j\rangle, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla\langle j\rangle\Phi\langle i_1\cdots i_r\rangle \boldsymbol{g}\langle j\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle i_1\rangle \otimes\cdots\otimes \boldsymbol{g}\langle i_r\rangle, \tag{37}$$

其中协变导数

$$\begin{aligned}\Phi\langle i_1\cdots i_r\rangle;\ \langle j\rangle &= \nabla\langle j\rangle\Phi\langle i_1\cdots i_r\rangle\\ &= \Phi\langle i_1\cdots i_r\rangle,\langle j\rangle + \sum_{p=1}^{r}\Gamma\langle jsi_p\rangle\Phi\langle i_1\cdots s\cdots i_r\rangle. \ \square\end{aligned} \tag{38}$$

10.6 定义 任何张量在物理标架上的分量称为**物理分量**. □

在实际应用上，常常由笛氏坐标系 $\{x^{i'}\}$ 直接转换到正交坐标系 $\{x^i\}$ 的物理标架 $\{\boldsymbol{g}\langle i\rangle\}$. 这时基向量和张量分量的转换

公式是

$$\boldsymbol{g}\langle i\rangle = A^i_{(i)}\boldsymbol{g}_i = (\sqrt{g^{ii}}A^{i'}_i)\boldsymbol{g}_{i'} = A^{i'}_{(i)}\boldsymbol{g}_{i'}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}\Phi\langle i\cdots j\rangle &= A^i_{(i)}\cdots A^j_{(j)}\Phi_{i\cdots j} = (\sqrt{g^{ii}}A^{i'}_i)\cdots(\sqrt{g^{jj}}A^{j'}_j)\Phi_{i'\cdots j'} \\ &= A^{i'}_{(i)}\cdots A^{j'}_{(j)}\Phi_{i'\cdots j'},\end{aligned} \tag{40}$$

其中

$$A^{i'}_{(i)} = \sqrt{g^{ii}}A^{i'}_i \tag{41}$$

是基向量 $\boldsymbol{g}\langle i\rangle$ 在笛氏标架 $\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$ 上的分解系数，即方向余弦 $\cos(\boldsymbol{g}\langle i\rangle, \boldsymbol{g}_{i'})$. 在三维情形,可列表如下:

$\cos(\boldsymbol{g}\langle i\rangle, \boldsymbol{g}_{i'})$	$\boldsymbol{g}_{1'}/\!/\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{g}_{2'}/\!/\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{g}_{3'}/\!/\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{g}\langle 1\rangle$	$A^{1'}_{(1)}=\sqrt{g^{11}}A^{1'}_1$	$A^{2'}_{(1)}=\sqrt{g^{11}}A^{2'}_1$	$A^{3'}_{(1)}=\sqrt{g^{11}}A^{3'}_1$
$\boldsymbol{g}\langle 2\rangle$	$A^{1'}_{(2)}=\sqrt{g^{22}}A^{1'}_2$	$A^{2'}_{(2)}=\sqrt{g^{22}}A^{2'}_2$	$A^{3'}_{(2)}=\sqrt{g^{22}}A^{3'}_2$
$\boldsymbol{g}\langle 3\rangle$	$A^{1'}_{(3)}=\sqrt{g^{33}}A^{1'}_3$	$A^{2'}_{(3)}=\sqrt{g^{33}}A^{2'}_3$	$A^{3'}_{(3)}=\sqrt{g^{33}}A^{3'}_3$

例. 从 $\mathbf{E}^3$ 的笛氏坐标系 $\{x^{i'}\}=\{x^{1'}=x,\ x^{2'}=y,\ x^{3'}=z\}$ 到圆柱坐标系 $\{x^i\}=\{x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=z\}$ 的转换关系 $x^{i'}=x^{i'}(x^i)$ 为

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z.$$

转换系数矩阵为

$$[A^{i'}_i] = \left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right] = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{42}$$

利用公式

$$g_{ii} = \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_i = A^{i'}_i A^{j'}_i g_{i'j'} = A^{i'}_i A^{j'}_i \delta_{i'j'} = \sum_{i'=1}^{3} A^{i'}_i A^{i'}_i$$

求 $\{x^i\}$ 的度量张量分量矩阵

$$[g_{ij}]=\operatorname{diag}(1,\ r^2,\ 1),\quad [g^{ij}]=\operatorname{diag}\left(1,\frac{1}{r^2},\ 1\right). \tag{43}$$

将 (42) 和 (43) 代入上表，得

$\cos(\boldsymbol{g}\langle i\rangle,\ \boldsymbol{g}_{i'})$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{g}_r$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
$\boldsymbol{g}_\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\boldsymbol{g}_z$	0	0	1

这样的变换系数是众所周知的．例如在弹性力学里应力张量的变换公式．学完了完整系的张量运算后，对这种变换系数的合理性可能发生过疑问，因为它们并不直接是新旧坐标的偏导数．现在根据非完整系物理标架的理论，问题就真相大白了．

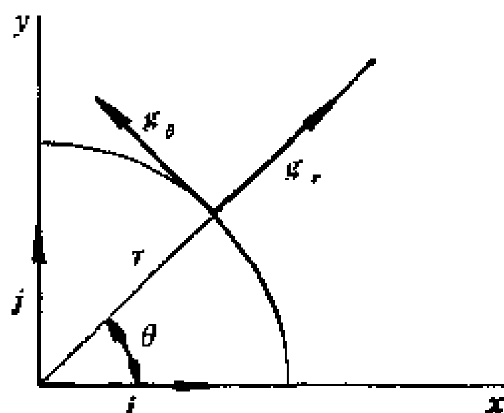


图 4

在这个物理标架的 Pfaff 导数是

$$\partial\langle 1\rangle=\sqrt{g^{11}}\,\partial_1=\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\partial\langle 2\rangle=\sqrt{g^{22}}\,\partial_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \partial\langle 3\rangle=\sqrt{g^{33}}\,\partial_3=\frac{\partial}{\partial z}.$$

由于只有 $\sqrt{g_{22}}=r$ 不是常数，根据定理 10.4，不为零的 Christoffel 符号只有

$$\Gamma\langle 212\rangle=-\Gamma\langle 221\rangle=\partial\langle 1\rangle\ln\sqrt{g_{22}}=\frac{\partial\ln r}{\partial r}=\frac{1}{r}.$$

设有向量场 $\boldsymbol{u}=u\langle i\rangle\boldsymbol{g}\langle i\rangle$，令 $u\langle 1\rangle=u_r$，$u\langle 2\rangle=u_\theta$，$u\langle 3\rangle=u_z$，则其散度(下一节定义)为

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{u}&=u\langle i\rangle;\langle i\rangle=\partial\langle i\rangle u\langle i\rangle+\Gamma\langle iji\rangle u\langle j\rangle\\&=\partial\langle 1\rangle u\langle 1\rangle+\partial\langle 2\rangle u\langle 2\rangle+\partial\langle 3\rangle u\langle 3\rangle+\Gamma\langle 212\rangle u\langle 1\rangle\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r}. \tag{44}$$

又设有应力张量场(仿射量场) $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\langle ij\rangle \boldsymbol{g}\langle i\rangle \otimes \boldsymbol{g}\langle j\rangle$. 令 $\sigma\langle 11\rangle = \sigma_{rr}$, $\sigma\langle 12\rangle = \sigma_{r\theta}$, $\sigma\langle 13\rangle = \sigma_{rz}$, $\sigma\langle 22\rangle = \sigma_{\theta\theta}, \cdots$, 则其平衡方程的分量形式是 $\sigma\langle ij\rangle;\langle j\rangle = 0$, 即

$$\partial\langle j\rangle\sigma\langle ij\rangle + \Gamma\langle jri\rangle\sigma\langle rj\rangle + \Gamma\langle jrj\rangle\sigma\langle ir\rangle = 0.$$

它的第一个方程是

$$\partial\langle 1\rangle\sigma\langle 11\rangle + \partial\langle 2\rangle\sigma\langle 12\rangle + \partial\langle 3\rangle\sigma\langle 13\rangle + \Gamma\langle 221\rangle\sigma\langle 22\rangle + \Gamma\langle 212\rangle\sigma\langle 11\rangle = 0,$$

即

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \tag{45}$$

(44) 和 (45) 都是我们所熟知的在圆柱坐标系的方程. 以前, 不用这里所陈述的理论,推导这些方程曾需要一定的直观想像力(如微元法). 圆柱坐标系是最简单的曲线坐标系. 当我们遇到更复杂的坐标系时,单凭直观就会发生困难, 甚至会失误,而用非完整系理论则万无一失.

§11 不变性微分算子

在 $\mathbf{E}^3$ 的向量分析中常用到四种**不变性微分算子**: 梯度 grad, 散度 div, 旋度 curl 和 Laplace 算子△. 现在将之推广至 $\mathbf{E}^n$ 的任意 r 阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$. $\{x^i\}$ 是曲线坐标系.

11.1 定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度定义为

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi} := \nabla\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla_k \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}, \tag{1}$$

它是 $r+1$ 阶张量场. 可见梯度就是左梯度.

11.2 定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的散度定义为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} \equiv \nabla\boldsymbol{\Phi} := \mathbf{C}_{(1,2)}\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi} = \nabla^k \Phi_{k i_2\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}, \tag{2}$$

它是 $r-1$ 阶张量场. 符号"$\nabla\boldsymbol{\Phi}$"使人想起,这个微分算子在代数上有点乘之意. □

向量场 $\boldsymbol{u}$ 的散度是

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = \nabla_i u^i = u^i_{;i} = \boldsymbol{u} \boldsymbol{\nabla}. \tag{3}$$

旋度算子要通过间接途径推广.

11.3 定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**旋转**定义为

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\Phi} := (r+1) \mathscr{A}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}), \tag{4}$$

它是 $r+1$ 阶反称张量场. □

利用反称化定义和梯度的分量表示,易证

11.4 定理 $\boldsymbol{\Phi}$ 的旋转可表示为

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Phi} &= (r+1) \nabla_{[i_1} \Phi_{i_2 \cdots i_{r+1}]} \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_{r+1}} \\ &= (r+1) \partial_{[i_1} \Phi_{i_2 \cdots i_{r+1}]} \boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_{r+1}} \qquad (5) \\ &= (r+1) \nabla_{i_1} \Phi_{i_2 \cdots i_{r+1}} \mathscr{A}(\boldsymbol{g}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{i_{r+1}}) \\ &= \frac{1}{r!} \nabla_{i_1} \Phi_{i_2 \cdots i_{r+1}} \boldsymbol{g}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}^{i_{r+1}} \\ &= \frac{1}{r!} \partial_{i_1} \Phi_{i_2 \cdots i_{r+1}} \boldsymbol{g}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{g}^{i_{r+1}}. \ \square \qquad (6) \end{aligned}$$

这里协变导数改为偏导数的根据是联络系数的对称性.在第 IX 章将看到,反称协变张量场(即所谓**微分形式**)的旋转就是它的**外微分**.

11.5 定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的旋转的 Hodge 对偶定义为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**旋度**

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \boldsymbol{\Phi} :&= * \operatorname{rot} \boldsymbol{\Phi} = (r+1) * \mathscr{A}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}) \qquad (7) \\ &= (r+1) \frac{(-1)^{(r+1)(n-r-1)}}{(r+1)!} \in \binom{r+1}{\cdot} \mathscr{A}(\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\Phi}) \\ &= \frac{(-1)^{r(n-r)}}{r!} \in^{i_1 \cdots i_{n-r-1} j_1 \cdots j_{r+1}} \nabla_{[j_1} \Phi_{j_2 \cdots j_{r+1}]} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{n-r-1}} \\ &= \frac{(-1)^{r(n-r)}}{r!} \in^{i_1 \cdots i_{n-r-1} j_1 \cdots j_{r+1}} \partial_{[j_1} \Phi_{j_2 \cdots j_{r+1}]} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{n-r-1}} \\ &= \frac{(-1)^{r(n-r)}}{r!} \in^{i_1 \cdots i_{n-r-1} j_1 \cdots j_{r+1}} \nabla_{j_1} \Phi_{j_2 \cdots j_{r+1}} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_{n-r-1}} \\ &= \frac{(-1)^{r(n-r)}}{r!} \in^{i_1 \cdots i_{n-r-1} j_1 \cdots j_{r+1}} \partial_{j_1} \Phi_{j_2 \cdots j_{r+1}} \boldsymbol{g}_{i_1} \otimes \cdots \end{aligned}$$

$$\otimes g_{i_{n-r-1}},\tag{8}$$

它是 $n-r-1$ 阶反称张量场. 在后两式中, $\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}$ 分量的反称化括弧被消去,因为 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的分量关于各指标反称. □

在这样的定义下, $\mathbf{E}^3$ 向量场 $\boldsymbol{u}$ 的旋度和经典定义一致:

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{u} &= 2*\mathscr{A}(\nabla_i u_j \boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j) = \nabla_i u_j *(\boldsymbol{g}^i\wedge\boldsymbol{g}^j)\\ &= \nabla_i u_j \boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j = \epsilon^{kij}\nabla_i u_j \boldsymbol{g}_k = \epsilon^{kij}\partial_i u_j \boldsymbol{g}_k.\end{aligned}\tag{9}$$

经典张量分析常记 $\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{g}^i\nabla_i$. 这样, $\boldsymbol{u}$ 的旋度可形式地记作

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u},\tag{10}$$

而对 $\boldsymbol{\Phi}$ 也可形式地记为 $\operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\Phi}$, 从而和 $\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Phi}$ 相呼应. 但应注意: 当 $n\neq 3$, 单独的叉积符号"×"没有意义.

11.6 定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 **Laplacian** 定义为

$$\Delta\boldsymbol{\Phi} := \operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi}\tag{11}$$

$$=\nabla^k\nabla_k\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}=\Phi_{i_1\cdots i_r;k}{}^{k}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r},\tag{12}$$

它仍是 r 阶张量场. 这里进行了两次协变微商, 因此△是二阶微分算子.

§12 自然平行性的后果

切空间的引进可使理论上有较清晰的逻辑性, 也便于在概念上过渡到更一般的空间(流形)的分析. 但是, 在欧氏点空间里存在自然平行性,所有切空间自然同构,任何一个约束于某点的张量可以与路径无关地平行移动到空间的任何点. 这样, 我们就有可能从约束量和自由量的严格区分解脱出来: 所有的量都可以看作是自由的, 在平行移动至任何点的意义下任何量之间可以进行代数运算. 例如,张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 在点 x 的值 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 代表约束于该点的张量, 但也可看作平移至任何点 y 的张量 $\boldsymbol{D}_y^{-1}\boldsymbol{D}_x\boldsymbol{\Phi}(x)$ (不必将平行移动算子 $\boldsymbol{D}_y^{-1}\boldsymbol{D}_x$ 写出). 于是,我们就可以直接了当地说, 曲线坐标系 $\{x^i\}$ 的自然局部基向量是向径对坐标的偏导数, 并写成

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{x}_{,i}, \tag{1}$$

而，考虑到上式，Christoffel 符号则可写成

$$\Gamma_{ijk} = \boldsymbol{x}_{,ij}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}_{i,j}\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}_{j,i}\boldsymbol{g}_k, \tag{2}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \boldsymbol{x}_{,ij}\boldsymbol{g}^k = \boldsymbol{g}_{i,j}\boldsymbol{g}^k = \boldsymbol{g}_{j,i}\boldsymbol{g}^k. \tag{3}$$

因而

$$\boldsymbol{g}_{i,j} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k. \tag{4}$$

考虑到

$$0 = \delta^k_{i,j} = (\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k)_{,j} = \boldsymbol{g}_{i,j}\boldsymbol{g}^k + \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k_{,j} = \Gamma^k_{ij} + \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k_{,j},$$

又得

$$\boldsymbol{g}^k_{,j} = -\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}^i. \tag{5}$$

按上述观点，任何张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的绝对微分就可等价地定义为

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\Phi}) \tag{6}$$

$$:= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}(x)]$$

$$= \frac{d}{ds}\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u})|_{s=0}. \tag{7}$$

对任何曲线坐标系 $\{x^i\}$，把 $\boldsymbol{u}$ 在点 x 的自然局部基 $\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$ 上分解，将 (7) 式计算出来，就可得

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u})|_{s=0} = (\boldsymbol{\Phi}(x))_{,k}u^k = (\boldsymbol{\Phi}(x))_{,k}\delta^k_i u^i$$

$$= (\boldsymbol{\Phi}(x))_{,k}(\boldsymbol{g}^k(u^j\boldsymbol{g}_j)) = ((\boldsymbol{\Phi}(x))_{,k}\otimes\boldsymbol{g}^k)\boldsymbol{u} \tag{8}$$

$$= ((u^j\boldsymbol{g}_j)\boldsymbol{g}^k)\partial_k\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}^k\otimes\partial_k\boldsymbol{\Phi}(x)). \tag{9}$$

将 (8, 9) 和 (6) 式比较，得 Hamilton 算子“$\boldsymbol{\nabla}$”的形式表示：

$$(\quad)\otimes\boldsymbol{\nabla} = (\quad)_{,i}\otimes\boldsymbol{g}^i, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes(\quad) = \boldsymbol{g}^i\otimes\partial_i(\quad). \tag{11}$$

利用结果 (4, 5) 就可简易地求出协变导数的表示式：

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = (\Phi^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j)_{,k}\otimes\boldsymbol{g}^k = (\Phi^i{}_{j,k}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j$$

$$+ \Phi^i{}_j\boldsymbol{g}_{i,k}\otimes\boldsymbol{g}^j + \Phi^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j_{,k})\otimes\boldsymbol{g}^k$$

$$= (\Phi^i{}_{j,k} + \Gamma^i_{rk}\Phi^r{}_j - \Gamma^r_{jk}\Phi^i_r)\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k$$

$$= \Phi^i{}_{j;k}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k, \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{g}^k\otimes\partial_k(\Phi^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j)\\
&= \boldsymbol{g}^k\otimes(\partial_k\Phi^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j + \Phi^i{}_j\partial_k\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j + \Phi^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j{}_{,k})\\
&= \nabla_k\Phi^i{}_j\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

不少经典张量分析的教科书，包括拙著"非线性弹性理论"在内，协变导数的表达式就是用这种方式得出来的，有其简便之处.

在讨论积分时，本节的做法提供了方便，简化了符号.

§13 积分和散度定理

设在欧氏点空间 $\mathbf{E}$ 定义有笛氏坐标系 $\{x_i\}$ 及其标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$. 又设在开域 $\mathscr{U}\subset\mathbf{E}$ 定义有光滑标量函数 φ. 从数学分析可知，对任何具有分片光滑边界 $\partial\mathscr{R}$ 的 (n 维) 子域 $\mathscr{R}\subset\mathscr{U}$，下述积分存在

$$
\int_{\mathscr{R}}\varphi dV, \qquad (1)
$$

其中 dV 是体积元素.

此外，下述积分定理是经典的

$$
\int_{\mathscr{R}}\varphi_{,i}dV = \int_{\partial\mathscr{R}}\varphi n_i dS \quad \forall 1\leqslant i\leqslant n, \qquad (2)
$$

其中 n_i 是 $\partial\mathscr{R}$ 的单位外法向量 $\boldsymbol{n}=n_j\boldsymbol{e}_j$ 的第 i 个分量. 证明大意如下：

固定指标 i. 将区域 $\mathscr{R}$ 划分成平行于 x_i 轴的柱体元素. 假设每柱体只和 $\partial\mathscr{R}$ 在两处相交. 任取一柱体如图5，记它和 $\partial\mathscr{R}^+$ 及 $\partial\mathscr{R}^-$ 之交分别为 ΔS^+ 及 ΔS^-. 它们在子空间 span $\{\cdots,\hat{\boldsymbol{e}}_i,\cdots\}$ 上的投影为 $\Delta\Sigma$，于是

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta S^+ n_i^+ &= \Delta\Sigma,\\
\Delta S^- n_i^- &= \Delta\Sigma,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

其中 n_i^+ 和 n_i^- 分别是 ΔS^+ 和 ΔS^- 某内点上单位外法向量的第 i 个分量. 于是，式(2)左端的积分就可如下，考虑(3)，依次书写，而最终得(2)的右端：

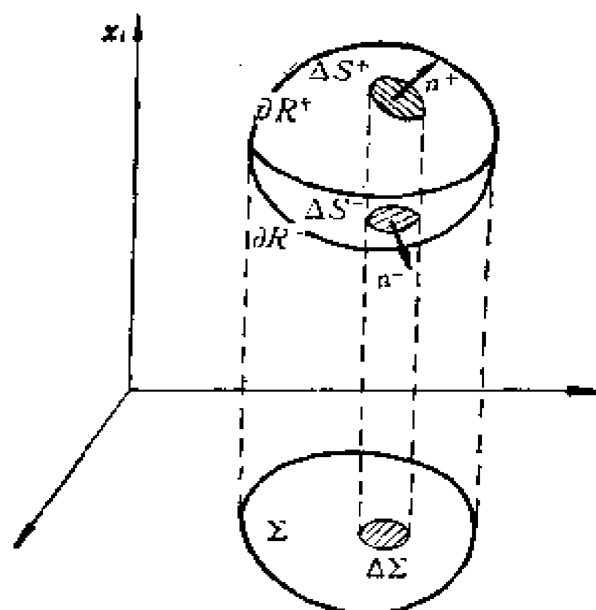


图 5

$$\int_{\mathscr{R}}\varphi_{,i}dV=\int_{\Sigma}d\Sigma\int_{x_i^-}^{x_i^+}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx_i$$
$$=\int_{\Sigma}[\varphi(\cdots,x_i^+,\cdots)-\varphi(\cdots,x_i^-,\cdots)]d\Sigma$$
$$=\int_{\partial\mathscr{R}}\varphi(x)n_idS.$$

对于每个给定的指标 i，(2) 式的左、右端是一个实数. 用这些数作为基向量 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 的线性组合的系数，就得一向量.

$$\left(\int_{\mathscr{R}}\varphi_{,i}\,dV\right)\boldsymbol{e}_i=\left(\int_{\partial\mathscr{R}}\varphi n_i\,dS\right)\boldsymbol{e}_i.$$

考虑到 $\boldsymbol{e}_i$ 是常向量，可以搬进积分号内，就得

$$\int_{\mathscr{R}}\varphi\boldsymbol{\nabla}dV=\int_{\partial\mathscr{R}}\varphi\boldsymbol{n}dS. \tag{4}$$

若在 (2) 每次取向量场 $\boldsymbol{u}=u_j\boldsymbol{e}_j$ 的一个分量 u_j 作为函数 φ，则又得

$$\int_{\mathscr{R}}u_{j,i}dV=\int_{\partial\mathscr{R}}u_jn_idS.$$

以之作为基 $\{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\}$ 的线性组合的系数，并将基搬至积分号内，又得

$$\int_{\mathscr{R}}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}dV=\int_{\partial\mathscr{R}}\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{n}dS \tag{5}$$

及

$$\int_{\mathscr{R}} \nabla \otimes \boldsymbol{u} dV = \int_{\partial \mathscr{R}} \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{u} dS. \tag{6}$$

又如果在 (2)，对每给定指标 i，取 u_i 作为 φ，并将所有 n 个积分分别在等号两端相加，可得

$$\int_{\mathscr{R}} \boldsymbol{u} \nabla dV = \int_{\partial \mathscr{R}} \boldsymbol{u} \boldsymbol{n} dS. \tag{7}$$

这就是场论中熟知的**散度定理**．更一般地，如果在 (2) 每次取任意阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的某分量作为函数 φ，就有推广的散度定理，称为 **Green 变换**：

$$\int_{\mathscr{R}} \boldsymbol{\Phi} \text{-}\circ \nabla dV = \int_{\partial \mathscr{R}} \boldsymbol{\Phi} \text{-}\circ \boldsymbol{n} dS \tag{8}$$

或

$$\int_{\mathscr{R}} \nabla \text{-}\circ \boldsymbol{\Phi} dV = \int_{\partial \mathscr{R}} \boldsymbol{n} \text{-}\circ \boldsymbol{\Phi} dS. \tag{9}$$

符号"—○"可以是张量积，点积，缩并等任何一种代数运算．

我们注意到，在公式推导中只用到了笛氏坐标系 $\{x_i\}$．但一旦得出公式的绝对形式 (4—9)，它们对任何曲线坐标系也成立．要牢记的是，这些公式没有在曲线坐标系的分量形式．这些公式的共同特点是将体积分化成面积分．

特别地，当 $\boldsymbol{\Phi}$ 是仿射量 $\boldsymbol{T}$，而"—○"代表点乘时，(8) 式给出在下一章要用到的公式

$$\int_{\mathscr{R}} \boldsymbol{T} \nabla dV = \int_{\partial \mathscr{R}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{n} dS. \tag{10}$$

最后，我们给出常用到的定理．

13.1 定理（局部化定理） 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $\mathscr{U}$ 上的连续张量场，则 $\forall x_0 \in \mathscr{U}$，有

$$\boldsymbol{\Phi}(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\int_{\mathscr{B}_\delta} \boldsymbol{\Phi} dV}{\int_{\mathscr{B}_\delta} dV}, \tag{11}$$

其中闭球 $\mathscr{B}_\delta = \{x \mid |x - x_0| \leqslant \delta, \ \delta > 0\}$．因此，若

$$\int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\Phi} dV = \boldsymbol{O}, \quad \forall \mathscr{B} \subset \mathscr{U},$$

则

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{O}.$$

证明 令

$$I_\delta = \left\| \boldsymbol{\Phi}(x_0) - \frac{\int_{\mathscr{B}_\delta} \boldsymbol{\Phi} dV}{\int_{\mathscr{B}_\delta} dV} \right\|,$$

则

$$I_\delta \leqslant \frac{\int_{\mathscr{B}_\delta} \|\boldsymbol{\Phi}(x_0) - \boldsymbol{\Phi}(x)\| dV}{\int_{\mathscr{B}_\delta} dV}$$

$$\leqslant \sup_{x \in \mathscr{B}_\delta} \|\boldsymbol{\Phi}(x_0) - \boldsymbol{\Phi}(x)\|.$$

由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 的连续性，当 $\delta \to 0$ 时，右端趋向于零. 定理得证.

第 VI 章　弹性的一般理论

为了说明前面阐述的张量理论的应用，本章扼要地介绍弹性的一般理论的一些主要方面．前五章的内容适用于一般的连续介质．

§1　形变几何学

设在三维欧氏(点)空间 $\mathbf{E}^3$ 运动的物体(连续统) $\mathscr{B}$ 在时刻 t_0 占有区域 $\mathscr{R}\subset\mathbf{E}$．在固定的原点 $O\in\mathbf{E}$ 下，这时处在向径为 $\boldsymbol{X}$ 的位置的物体**典型点**（也就是任意点而不是指定点）也称为**物质点**，并用 $\boldsymbol{X}$ 表示．在时刻 t 物体 $\mathscr{B}$ 占有区域 $r(t)\subset\mathbf{E}$，而物质点 $\boldsymbol{X}$ 则占有向径为 $\boldsymbol{x}$ 的位置：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},\ t).\tag{1}$$

我们常说物体的**参考构形** $\mathscr{R}$ 和**当前构形** $r(t)$．对于固定的两个时刻 t_0 和 t，由构形 $\mathscr{R}$ 到构形 $r(t)$ 的过渡称为物体的**形变**：

$$\mathscr{R}\to r(t):\boldsymbol{X}\longmapsto\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}).\tag{2}$$

在变形中，下述假定是经典的：一个物质点不可能变成两个，而物体内的两个物质点不可能合成一个．就是说，映射 (2) 是一一对应的． 我们还假定形变是光滑的． 其实，(2) 可以看成切空间 $T_O\mathbf{E}$ 的一个子集到 $T_O\mathbf{E}$ 的另一个子集的映射(一般是非线性的)．

现看形变在物质点 $\boldsymbol{X}$ 邻域的局部情况． 可以用约束于点 $\boldsymbol{X}$ 的(小)向量 $\boldsymbol{u}$ 来刻划邻域内的任意点在 $\mathscr{R}$ 的位置： $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u}$（在 $\boldsymbol{u}$ 上的各物质点组成**物质线素**）． 物质点 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u}$ 在形变 (2) 下，占有位置 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u})\in r(t)$． 于是，形变后两邻近点的相对位置是向量 $\boldsymbol{X}$ 的向量值函数 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})$ 的增量，可表为

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u})-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{u}+o(\boldsymbol{u}),\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{x} \otimes \mathring{\nabla} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{X}}$ 称为**变形梯度**,是一个仿射量场. 本节只讨论物质点 $\boldsymbol{X}$ 的局部情况. 为简便计,用 $\boldsymbol{F}$ 表示 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. (3) 式说明,以当 $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{o}$ 而消失的误差, $\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}$ 是物质线素 $\boldsymbol{u}$ 上各点形变后的所在地,或者说是形变后的物质线素. 今后均在这种局部近似意义下谈论形变后的物质线素. 于是,变形梯度线性地把切空间 $T_{\boldsymbol{X}}\mathrm{E}$ 在零向量的邻域映射为 $T_{\boldsymbol{x}}\mathrm{E}$ 在零向量的邻域. 物质点是不会消失的(非零的体积不会变为零体积)和不可渗透的. 这使我们可以局部地接受假设

$$\det \boldsymbol{F} > 0. \tag{4}$$

因此,变形梯度是正则仿射量,可以进行极分解:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}, \quad (\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}}, \quad \boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^*}) \tag{5}$$

其中正定对称仿射量 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别称为形变 (2) 的**右**和**左伸缩张量**. 我们将看到, $\boldsymbol{U}$ (或 $\boldsymbol{V}$) 在点 $\boldsymbol{X}$ 的值 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X})$ (今后也简记为 $\boldsymbol{U}$) 刻划 $\boldsymbol{X}$ 点的**应变状态**. 根据假设 (4) 和 $\boldsymbol{U}$ 的正定性,从

$$\det \boldsymbol{F} = (\det \boldsymbol{R})(\det \boldsymbol{U})$$

可知, $\boldsymbol{R}$ 是转动仿射量 ($\det \boldsymbol{R} = 1$).

1.1 命题 右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 完全确定出发于物质点 $\boldsymbol{X}$ 的任何方向 $\boldsymbol{N}$ 的物质线素的长度变化——**长度比**:

$$\lambda_{\boldsymbol{N}} = |\boldsymbol{U}\boldsymbol{N}|. \tag{6}$$

证明 取单位向量 $\boldsymbol{N} \in T_{\boldsymbol{X}}\mathrm{E}$. 记物质线素 $s\boldsymbol{N}$ 的长度为

$$\Delta L = |s\boldsymbol{N}|$$

和形变后物质线素

$$\boldsymbol{n}_s \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{N}) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = s\boldsymbol{F}\boldsymbol{N} + o(s)$$

的长度为

$$\Delta l = |\boldsymbol{n}_s|.$$

定义 $\boldsymbol{N}$ 方向的长度比为

$$\begin{aligned}\lambda_{\boldsymbol{N}} &\equiv \frac{dl}{dL} := \lim_{s\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta L} = \lim_{s\to 0}\frac{|\boldsymbol{n}_s|}{|s\boldsymbol{N}|} = \lim_{s\to 0}\sqrt{\frac{\boldsymbol{n}_s\boldsymbol{n}_s}{s^2\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}}} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N})(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N})} = |\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}| \qquad\qquad (7) \\ &= \sqrt{\boldsymbol{N}\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}} = \sqrt{\boldsymbol{N}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{N}} = |\boldsymbol{U}\boldsymbol{N}|. \ \square\end{aligned}$$

物质点 $\boldsymbol{X}$ 所有方向的长度比 $\{\lambda_{\boldsymbol{N}}\}$ 构成该点的**应变状态**. 命题 1.1 说明,有了右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$, 就可算出任何方向的 $\lambda_{\boldsymbol{N}}$. 我们说, $\boldsymbol{U}$ 刻划该点的应变状态.

1.2 命题 右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 完全确定过物质点 $\boldsymbol{X}$ 的任何方向的物质面素的面积变化——**面积比**:

$$\sigma_{\boldsymbol{N}} = (\det \boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{N}|. \tag{8}$$

证明 取垂直于单位向量 $\boldsymbol{N} \in T_{\boldsymbol{X}}\mathrm{E}$ 的非共线单位向量 $\boldsymbol{N}^1$, $\boldsymbol{N}^2 \in T_{\boldsymbol{X}}\mathrm{E}$. 记物质面素 $(s\boldsymbol{N}^1) \times (s\boldsymbol{N}^2)$ 的面积为

$$\Delta A = |(s\boldsymbol{N}^1) \times (s\boldsymbol{N}^2)|$$

和

$$\boldsymbol{n}_s^\alpha \equiv \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{N}^\alpha) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = s\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^\alpha + o(s), \quad \alpha = 1, 2.$$

又记形变后物质面素的面积为

$$\Delta a = |\boldsymbol{n}_s^1 \times \boldsymbol{n}_s^2|.$$

取单位向量 $\boldsymbol{n} \in (\mathrm{span}\,\{\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1, \boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2\})^\perp$. 定义 $\boldsymbol{N}$ 方向物质面素的面积比为

$$\sigma_{\boldsymbol{N}} \equiv \frac{da}{dA} := \lim_{s\to 0} \frac{\Delta a}{\Delta A} = \lim_{s\to 0} \frac{|\boldsymbol{n}_s^1 \times \boldsymbol{n}_s^2|}{|(s\boldsymbol{N}^1) \times (s\boldsymbol{N}^2)|}$$

$$= \frac{|(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1) \times (\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2)|}{|\boldsymbol{N}^1 \times \boldsymbol{N}^2|}.$$

利用 Nanson 公式 (III. 5. 31), $\det \boldsymbol{R} = 1$ 和上式,依次有

$$(\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-*}\boldsymbol{N} = \frac{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1) \times (\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2)}{|\boldsymbol{N}^1 \times \boldsymbol{N}^2|}$$

$$= \frac{|(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1) \times (\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2)|}{|\boldsymbol{N}^1 \times \boldsymbol{N}^2|} \frac{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1) \times (\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2)}{|(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1) \times (\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2)|} = \boldsymbol{n}\sigma_{\boldsymbol{N}},$$

$$\sigma_{\boldsymbol{N}} = (\det \boldsymbol{F})\sqrt{(\boldsymbol{F}^{-*}\boldsymbol{N})(\boldsymbol{F}^{-*}\boldsymbol{N})} = (\det \boldsymbol{U})\sqrt{\boldsymbol{N}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-*}\boldsymbol{N}}$$

$$= (\det \boldsymbol{U})\sqrt{\boldsymbol{N}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{N}} = (\det \boldsymbol{U})\sqrt{\boldsymbol{N}\boldsymbol{U}^{-2}\boldsymbol{N}}$$

$$= (\det \boldsymbol{U})|\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{N}|. \quad \square$$

可见,面积比只依赖于物质面素的法向, 而与所取的 $\boldsymbol{N}^1$, $\boldsymbol{N}^2$ 无关.

1.3 命题 右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 完全确定包含物质点 $\boldsymbol{X}$ 的任何物质

体素的体积变化——**体积比**

$$\mathscr{J} = \det \boldsymbol{U}. \tag{9}$$

证明 取非共面单位向量 $\boldsymbol{N}^1, \boldsymbol{N}^2, \boldsymbol{N}^3 \in T_X\mathrm{E}$. 记物质体素 $[s\boldsymbol{N}^1, s\boldsymbol{N}^2, s\boldsymbol{N}^3]$ 的体积为 ΔV 和

$$\boldsymbol{n}_s^\alpha = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X} + s\boldsymbol{N}^\alpha) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = s\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^\alpha + o(s), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

又记形变后体素的体积为 $\Delta v = [\boldsymbol{n}_s^1, \boldsymbol{n}_s^2, \boldsymbol{n}_s^3]$. 则体积比为

$$\mathscr{J} = \frac{dv}{dV} := \lim_{s\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta V} = \lim_{s\to 0}\frac{[\boldsymbol{n}_s^1, \boldsymbol{n}_s^2, \boldsymbol{n}_s^3]}{[s\boldsymbol{N}^1, s\boldsymbol{N}^2, s\boldsymbol{N}^3]}$$

$$= \frac{[\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1, \boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2, \boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^3]}{[\boldsymbol{N}^1, \boldsymbol{N}^2, \boldsymbol{N}^3]} = \det\boldsymbol{F} = \det\boldsymbol{U},$$

其中用到 (III.5.28)$_3$.

1.4 命题 右伸缩张量 $\boldsymbol{U}$ 完全确定出发于物质点 $\boldsymbol{X}$ 的任何两物质线素的剪切 γ，即夹角的减小量.

证明 取命题 1.2 的证明中的两单位向量 $\boldsymbol{N}^1$ 和 $\boldsymbol{N}^2$. 记其夹角为 Θ，形变后的夹角为 θ，$\gamma = \Theta - \theta$，则利用 (7)，有

$$\cos(\Theta - \gamma) = \cos\theta := \lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{n}_s^1\boldsymbol{n}_s^2}{|\boldsymbol{n}_s^1|\,|\boldsymbol{n}_s^2|} = \frac{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1)(\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2)}{|\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^1|\,|\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2|}$$

$$= \frac{\boldsymbol{N}^1\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}^2}{\lambda_{\boldsymbol{N}^1}\lambda_{\boldsymbol{N}^2}} = (\lambda_{\boldsymbol{N}^1}\lambda_{\boldsymbol{N}^2})^{-1}\boldsymbol{N}^1\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{N}^2. \ \square$$

对左伸缩张量 $\boldsymbol{V}$ 有类似于上述的四个命题. 为了避免平方根，经常采用等效地描述应变状态的**右和左 Cauchy-Green 应变张量**:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^*. \tag{10}$$

也常用到 **Almansi 应变张量**:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}). \tag{11}$$

§2 运 动 学

现讨论物体 $\mathscr{B}$ 的运动

$$\mathscr{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{E}:(\boldsymbol{X}, t) \longmapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t). \tag{1}$$

这是以时间 t 为参量的光滑形变单参族. (1) 式表示，物质点 $\boldsymbol{X}$ 在时刻 t 占有空间位置 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$. 由于 § 1 对形变的假设，存在 (1) 的逆变换：

$$(\boldsymbol{x}, t) \longmapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), \tag{2}$$

它表示在时刻 t 占有位置 $\boldsymbol{x}$ 的是物质点 $\boldsymbol{X}$.

以 $\mathscr{R} \times \mathbf{R}$ 为定义域的张量场称为**物质场**，而以 $\boldsymbol{x} \in r(t)$ 和 t 为变量的则是**空间场**. 利用 (1, 2)，这两种场的转换是容易的. 例如，物质场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**空间描述** (**Euler 描述**)是

$$\boldsymbol{\Phi}_s(\boldsymbol{x}, t) := \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t),$$

而空间场 $\boldsymbol{\Omega}$ 又可有**物质描述** (**Lagrange 描述**):

$$\boldsymbol{\Omega}_m(\boldsymbol{X}, t) := \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t).$$

显然，

$$(\boldsymbol{\Phi}_s)_m = \boldsymbol{\Phi}, \quad (\boldsymbol{\Omega}_m)_s = \boldsymbol{\Omega}. \tag{3}$$

物质点 $\boldsymbol{X}$ 的**速度**和**加速度**定义为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}, t) := \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), \tag{4}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}, t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t). \tag{5}$$

速度场 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 是物质场. 为简单计，它的空间描述记为 $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) := \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t).$$

给定物质场 $\boldsymbol{\Phi}$，可求它的**物质时间导数**

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{6}$$

和它的**物质梯度**

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{X}, t) \otimes \mathring{\nabla}. \tag{7}$$

显然，变形梯度 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{x} \otimes \mathring{\nabla}$ 是物质场.

类似地，可定义空间场 $\boldsymbol{\Omega}$ 的**空间时间导数** $\boldsymbol{\Omega}'(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}, t)$ 和**空间梯度** $\boldsymbol{\Omega} \otimes \nabla$. 通过空间场 $\boldsymbol{\Omega}$ 的物质描述，我们定

义它的物质时间导数:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}:=((\boldsymbol{\Omega}_m)^{\cdot})_{\mathscr{g}},\tag{8}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{x},t):=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}.\tag{9}$$

2.1 命题 物质时间导数可和描述的转换交换.

证明 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 分别是光滑的物质场和空间场. 则按定义(8)和(3),有

$$(\boldsymbol{\Phi}_{\mathscr{g}})^{\cdot}=(((\boldsymbol{\Phi}_{\mathscr{g}})_m)^{\cdot})_{\mathscr{g}}=(\dot{\boldsymbol{\Phi}})_{\mathscr{g}}\equiv\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathscr{g}},\tag{10}$$

$$(\dot{\boldsymbol{\Omega}})_m=(((\boldsymbol{\Omega}_m)^{\cdot})_{\mathscr{g}})_m=(\boldsymbol{\Omega}_m)^{\cdot}\equiv\dot{\boldsymbol{\Omega}}_m.\ \square\tag{11}$$

若在(11),取 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{v}$,则

$$(\dot{\boldsymbol{v}})_m=(\boldsymbol{v}_m)^{\cdot}=(\dot{\boldsymbol{x}})^{\cdot}=\ddot{\boldsymbol{x}}.\tag{12}$$

因此,$\dot{\boldsymbol{v}}$ 是加速度的空间描述,也记为 $\boldsymbol{a}$。

2.2 命题 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是光滑空间张量,则

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{\Phi}'+(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}.\tag{13}$$

证明 由定义(9)和链式法则,有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}\\&=(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x},t)\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t)+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x},t)\\&=(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x},t).\ \square\end{aligned}$$

2.3 命题 设 $\boldsymbol{u}$ 是光滑空间向量场,则

$$\boldsymbol{u}_m\otimes\mathring{\boldsymbol{\nabla}}=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla})_m\boldsymbol{F}.\tag{14}$$

证明 只要利用链式法则于复合函数 $\boldsymbol{u}_m=\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{x}$. $\square$

2.4 定义 空间仿射量场

$$\boldsymbol{L}:=\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\nabla}\tag{15}$$

称为**速度梯度**。

2.5 命题

$$\dot{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{L}_m\boldsymbol{F}.\tag{16}$$

证明 在(14)中,令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$,则按定义依次有

$$\dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X},t)=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{x}\otimes\mathring{\boldsymbol{\nabla}})(\boldsymbol{X},t)=(\dot{\boldsymbol{x}}\otimes\mathring{\boldsymbol{\nabla}})(\boldsymbol{X},t)$$

$$= (\boldsymbol{v}_m \otimes \check{\boldsymbol{\nabla}})(\boldsymbol{X}, t) = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\nabla})_m \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t)$$
$$= \boldsymbol{L}_m \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t). \quad \square$$

在点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域任取一点 $\boldsymbol{y}$，则在点 $\boldsymbol{y}$ 处的物质点对在点 $\boldsymbol{x}$ 处的物质点相对速度是

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + o(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

将速度梯度加法分解：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{D}, \tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^*). \tag{19}$$

这样，相对速度以误差 $o(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ 的精度由有刚性转动性质的 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ 和改变形状的 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ 两速度相加而成．因此，$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t)$ 和 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}, t)$ 分别称为**旋率**和**变形率**．

2.6 定理（体积输运定理） 设物体 $\mathscr{B}$ 的任意部份在参考构形占有区域 $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$．它在当前构形占有区域 $\mathscr{P}_t \subset r(t)$ 的体积 $\mathrm{Vol}(\mathscr{P}_t)$ 是时间 t 的标量值函数．我们有

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\mathscr{P}_t) = \int_{\mathscr{P}} (\det \boldsymbol{F})^{\cdot} dV = \int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla} dv$$
$$= \int_{\partial \mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} da. \tag{20}$$

证明 将下述结果（用到 (16)）

$$\boldsymbol{F}^{-*} : \dot{\boldsymbol{F}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\boldsymbol{F}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{L}_m\boldsymbol{F})$$
$$= \mathrm{tr}\,\boldsymbol{L}_m = \mathrm{tr}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{\nabla})_m = (\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})_m = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})_m \tag{21}$$

代入 (IV.8.8)，得

$$(\det \boldsymbol{F})^{\cdot} = (\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-*} : \dot{\boldsymbol{F}} = (\det \boldsymbol{F})(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})_m. \tag{22}$$

于是，我们依次有

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\mathscr{P}_t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} dv = \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}} (\det \boldsymbol{F}) dV$$

$$= \int_{\mathscr{P}} (\det \boldsymbol{F})^{\cdot} dV = \int_{\mathscr{P}} (\boldsymbol{v}\nabla)_m (\det \boldsymbol{F}) dV$$

$$= \int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\nabla dv = \int_{\partial\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{n} da.$$

2.7 定理 (Reynolds 输运定理) 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是光滑空间张量场，则对物体任何部份 $\mathscr{P}$ 和时间 t，有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi} dv = \int_{\mathscr{P}_t} (\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\nabla)) dv, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi} dv = \int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi}' dv + \int_{\partial\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}) da. \tag{24}$$

证明 利用(22)，得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi} dv = \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}} \boldsymbol{\Phi}_m \det \boldsymbol{F} dV = \int_{\mathscr{P}} (\boldsymbol{\Phi}_m \det \boldsymbol{F})^{\cdot} dV$$

$$= \int_{\mathscr{P}} (\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\nabla))_m \det \boldsymbol{F} dV = \int_{\mathscr{P}_t} (\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \boldsymbol{\Phi} \operatorname{div} \boldsymbol{v}) dv.$$

此即(23)．利用命题2.2，又得

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\nabla) = \boldsymbol{\Phi}' + (\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}\nabla)$$

$$= \boldsymbol{\Phi}' + (\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{v})\nabla.$$

代入(2.3)，有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi} dv = \int_{\mathscr{P}_t} (\boldsymbol{\Phi}' + (\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{v})\nabla) dv.$$

对上式右端积分的第二项用散度定理就得(24)．

§3 质　　量

3.1 定义 在运动中，物体的**质量密度分布**是一个随时间 t 而变化的光滑空间正标量场

$$\rho: (\boldsymbol{x}, t) \longmapsto \rho(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \boldsymbol{x} \in r(t), \tag{1}$$

满足

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \rho(\boldsymbol{x}, t) dv = 0, \quad \forall \mathscr{P} \subset \mathscr{R}. \tag{2}$$

$$m(\mathscr{P}) = \int_{\mathscr{P}_t} \rho(\boldsymbol{x}, t)dv \tag{3}$$

称为物体部分 $\mathscr{P}$ 的**质量**. (2) 表示**质量守恒**. □

对于参考构形 $\mathscr{R} = r(t_0)$, ρ 成为物质场,记为 ρ_0

$$\rho_0(\boldsymbol{X}) \equiv \rho(\boldsymbol{X}, t_0). \tag{4}$$

3.2 命题 在运动 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ 中,恒有

$$\rho_m\mathscr{J} = \rho_0, \quad (\mathscr{J} = \det \boldsymbol{F}), \tag{5}$$

即

$$\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t)\det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) = \rho_0(\boldsymbol{X}). \tag{6}$$

证明 根据 (2) 和 (3), 并进行积分变量代换,得

$$\int_{\mathscr{P}} \rho_0(\boldsymbol{X})\, dV = \int_{\mathscr{P}_t} \rho(\boldsymbol{x}, t)dv$$
$$= \int_{\mathscr{P}} \rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t)\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)dV.$$

于是

$$\int_{\mathscr{P}} [\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t) \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t) - \rho_0(\boldsymbol{X})]dV = \underset{\sim}{0}.$$

由局部化定理,得 (6).

3.3 定理(质量守恒的局部形式)

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{7}$$

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0. \tag{8}$$

证明 将 (6) 转成空间描述,并求物质时间导数,得

$$\dot{\rho}(\det \boldsymbol{F})_{\mathscr{S}} + \rho(\det \boldsymbol{F})\dot{}_{\mathscr{S}} = 0.$$

将 (2.22) 转成空间描述, 代入上式就得 (7). 在 (2.13) 中取 ρ 为 $\boldsymbol{\Phi}$, 得

$$\dot{\rho} = \rho' + (\rho\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}.$$

将上式代入 (7), 并考虑到

$$\rho(\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla}) + (\rho\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = (\rho\boldsymbol{v})\boldsymbol{\nabla},$$

就得 (8).

3.4 定理 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 是光滑空间张量场,则有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\Phi}\rho dv = \int_{\mathscr{P}_t} \dot{\boldsymbol{\Phi}}\rho dv, \quad \forall\mathscr{P}\subset\mathscr{R}. \tag{9}$$

证明 利用(6)式,得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x},t)dv=\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)dV$$

$$=\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}}\boldsymbol{\Phi}_m(\boldsymbol{X},t)\rho_0(\boldsymbol{X})dV=\int_{\mathscr{P}}\dot{\boldsymbol{\Phi}}_m(\boldsymbol{X},t)\rho_0(\boldsymbol{X})dV$$

$$=\int_{\mathscr{P}}\dot{\boldsymbol{\Phi}}_m(\boldsymbol{X},t)\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},t),t)\det\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)dV$$

$$=\int_{\mathscr{P}_t}\dot{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x},t)\rho(\boldsymbol{x},t)dv.$$

§4 动力学分析

引起物体形变和运动的因素可以是多种多样的. 这里只讨论力的因素,称为**外力**. 外力可以分布性地作用于物体内部,也可以作用于物体的表面. 前者称为**体力**,后者为**面力**. 假定这些分布都是光滑的. 记作用在点 $\boldsymbol{x}$ 单位质量的体力为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$,体力是空间场.

除了外力,物体各部分间还相互作用,就有所谓**内力**. 这里只考虑**接触力**形式的内力. 物体的任意部份 $\mathscr{P}_t$ 和其余部分通过交界面 $\partial\mathscr{P}_t$ 以接触力而相互作用. 如果 $\partial\mathscr{P}_t$ 的某部分趋向于 $\partial r(t)$ 的某部分,则该部分的接触力就趋向于以面力形式出现的外力.

对于接触力我们有 Cauchy 应力公设,它是使连续介质力学取得成功的关键之一. 下面简述这个公设. 考虑物体的任意部分 $\mathscr{P}$. 在 $\partial\mathscr{P}_t$ 上取含点 $\boldsymbol{x}$ 的面元序列 $\Delta a\to\{\boldsymbol{x}\}$. 物体的其余部分通过一个具体的 Δa 作用于 $\mathscr{P}_t$ 的接触力可归结为作用于点 $\boldsymbol{x}$ 的合力 $\Delta\boldsymbol{t}$ 和合力矩 $\Delta\boldsymbol{m}$. **Cauchy 应力公设**认为:存在下列极限

$$\lim_{\Delta a\to\{\boldsymbol{x}\}}\frac{\Delta\boldsymbol{t}}{\Delta a},\quad\lim_{\Delta a\to\{\boldsymbol{x}\}}\frac{\Delta\boldsymbol{m}}{\Delta a}.\tag{1}$$

第一个极限与 $\partial\mathscr{P}_t$ 的形状无关，而只依赖于 $\partial\mathscr{P}_t$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 的外法向量 $\boldsymbol{n}$.（其实，这一点可不必作为公设，Hamel 和 Noll 通过动量平衡律证明了它）. 因此可写成

$$\boldsymbol{t}_n(\boldsymbol{x},t):=\lim_{\Delta a\to\{x\}}\frac{\Delta \boldsymbol{t}}{\Delta a}. \tag{2}$$

对于本书只考虑的非极性理论，(1) 的第二个极限假设为零. 假设极限 (2) 是点 $\boldsymbol{x}$ 和时间 t 的光滑函数. 可以看出，它也是外法向量 $\boldsymbol{n}$ 的函数. (2) 式中的下标 $\boldsymbol{n}$ 正是为了表明这种依赖关系. 因此，确切地说，$\boldsymbol{t}_n$ 是在当前构形 $\boldsymbol{r}(t)$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的截面上的**应力向量密度**. 根据作用与反作用原理，我们有

$$\boldsymbol{t}_{-n}=-\boldsymbol{t}_n. \tag{3}$$

接触力表示物体内部相互作用的紧张程度. 物质点在所有方向截面的应力向量 $\{\boldsymbol{t}_n\}$ 构成该点的**应力状态**. 正如应变状态的体现者是各种应变张量，应力状态也由各种应力张量刻划. 定义这些张量的出发点是**动量**和**动量矩平衡律**：

物体的任意部分 $\mathscr{P}$ 的动量和动量矩的时间变化率分别等于作用在 $\mathscr{P}_t$ 的合力和合力矩：

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{v}\rho dv=\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{f}\rho dv+\int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{t}_n da, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}\rho dv=\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}\rho dv+\int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_n da. \tag{5}$$

利用定理 3.4 和

$$\dot{\overline{\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}}}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a},$$

(4, 5) 两式变为

$$\int_{\mathscr{P}_t}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f})\rho dv=\int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{t}_n da, \tag{6}$$

$$\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f})\rho dv=\int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}_n da. \tag{7}$$

4.1 定理（Cauchy 应力存在定理） 若应力向量密度 $\boldsymbol{t}_n$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数

$$t_n = h(x, n),\tag{8}$$

则 t_n 线性依赖于 n. 因此，根据商法则(第 IV 章引理 7.3)，存在空间仿射量场 t，使得

$$t_n(x, t) = t(x, t)n.\tag{9}$$

t 称为 **Cauchy 应力张量**，它刻划物体每点的应力状态.

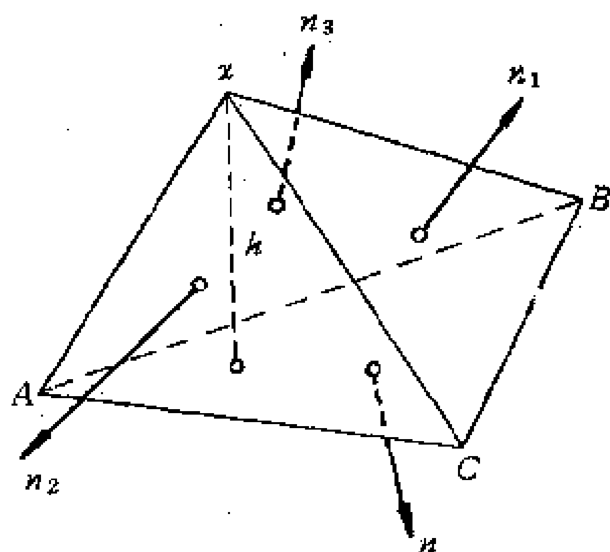


图 6.

证明 在 $r(t)$ 考虑任意非退化四面体 $xABC$ 如图 6. 它的四个面分别有面积 a 和 a^i，单位外法向量 n 和 n_i. 四面体的体积是

$$v = \frac{1}{3}\ ha,\tag{10}$$

其中 h 是到顶点 x 的高. 应用当 $\varphi = 1$ 时的 (V.13.4) 式 $\int n da = o$ 于这个四面体，得

$$na + n_i a^i = o \quad 即 \quad n = -\frac{a^i}{a} n_i.\tag{11}$$

应用积分中值定理于 (6) 式，有

$$[(a - f)\rho]_* v = (t_n)_* a + (t_{n_i})_* a^i,\tag{12}$$

其中( )$_*$表示涉及量在积分区域内某点的值. 将 (10) 代入 (12)，除以 a，保持各 n_i 不变地(从而各 a^i/a 也不变)，令 $h \to 0$，根据连

续性假设，(12) 变成

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = -\frac{a^i}{a}\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}_i}. \tag{13}$$

将 (8) 和 (11) 依次代入 (13)，得

$$\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x},\ -\frac{a^i}{a}\boldsymbol{n}_i\right) = -\frac{a^i}{a}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n}_i).$$

这意味着 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ 线性依赖于 $\boldsymbol{n}$. □

由于四面体非退化，$\{\boldsymbol{n}_i\}$ 非共面，可以取作 $T_x\mathrm{E}$ 的基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$. 于是，由 (11) 式就得 $\boldsymbol{n}$ 的逆变分量：

$$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{n} = -\frac{a^i}{a}. \tag{14}$$

将之代入 (13)，有

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{g}_i}(\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{g}_i}\otimes\boldsymbol{g}^i)\boldsymbol{n}. \tag{15}$$

和 (9) 比较，得

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{g}_i}\otimes\boldsymbol{g}^i. \tag{16}$$

这表示，作用在点 $\boldsymbol{x}$ 的三个非共线的截面上的应力向量 $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{g}_i}$ 完全确定该点的应力状态。

将 (9) 代回动量平衡律 (6)，得

$$\int_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f})\rho dv = \int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}da.$$

应用散度定理 (V.13.10) 于右端，根据局部化定理，我们最终得 Cauchy 应力张量必须满足的 **Cauchy 运动方程**：

$$\boldsymbol{t}\boldsymbol{\nabla} + \rho\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{a} \quad 在\ r(t). \tag{17}$$

将 (9) 代入 (7)，并应用散度定理，依次得

$$\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f})\rho dv = \int_{\partial\mathscr{P}_t}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\boldsymbol{n}da,$$

$$\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f})\rho dv = \int_{\mathscr{P}_t}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\boldsymbol{\nabla}dv. \tag{18}$$

考虑到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t})\boldsymbol{\nabla} &= [\boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{t})]\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\epsilon}:[\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{t}\boldsymbol{\nabla}) + (\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{t}^*]\\ &= \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{t}\boldsymbol{\nabla}) - \boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{t},\end{aligned}$$

(17) 和 (18) 式给出

$$\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{t}dv = \boldsymbol{o}, \qquad \forall \mathscr{P} \subset \mathscr{R}. \tag{19}$$

由局部化定理，有

$$\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{t} = \boldsymbol{o}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in r(t). \tag{20}$$

考虑到 $\boldsymbol{\epsilon\epsilon}:\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}^*$，(20) 式等价于

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^*. \tag{21}$$

因此，Cauchy 应力张量是对称仿射量. 这是动量矩平衡律的要求. 如果将 $\boldsymbol{t}$ 局限于 Sym 而进行讨论，则动量矩平衡律在动量平衡律已满足的前提下自然满足. 由于 (21)，Cauchy 运动方程也可写成

$$\nabla \boldsymbol{t} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{a} \qquad \text{在} \, r(t). \tag{22}$$

Cauchy 应力张量场是空间场，Cauchy 运动方程 (17) 或 (22) 属 Euler 型. 对许多问题，Lagrange 型方程更方便. 为此，利用命题 1.2 和 1.3，将 (6) 改写为物质描述

$$\int_{\mathscr{P}} (\ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}_m)\rho_m \det \boldsymbol{F} dV = \int_{\partial \mathscr{P}} \mathscr{J} \boldsymbol{t}_m \boldsymbol{F}^{-*} \boldsymbol{N} dA. \tag{23}$$

利用命题 3.2，并引进仿射量

$$\boldsymbol{\tau} = \mathscr{J} \boldsymbol{t}_m \boldsymbol{F}^{-*}, \tag{24}$$

称为**第一 Piola-Kirchhoff 应力张量**，(23) 变为

$$\int_{\mathscr{P}} (\ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}) \rho_0 dV = \int_{\partial \mathscr{P}} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{N} dA, \tag{25}$$

其中物质场 $\boldsymbol{f}$ 略去了下标 m. 应用散度定理和局部化定理，又得 **Boussinesq 运动方程**:

$$\boldsymbol{\tau} \mathring{\nabla} + \rho_0 \boldsymbol{f} = \rho_0 \ddot{\boldsymbol{x}} \qquad \text{在} \, \mathscr{R}, \tag{26}$$

属于 Lagrange 型.

文献中还引进更方便的**第二 Piola-Kirchhoff 应力张量**

$$\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} = \mathscr{J} \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{t}_m \boldsymbol{F}^{-*}, \qquad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}. \tag{27}$$

由于 $\boldsymbol{t}$ 的对称性，显然

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*. \tag{28}$$

这时，(26) 就变成 **Kirchhoff 运动方程**:

$$(\boldsymbol{F}\boldsymbol{T})\mathring{\nabla} + \rho_0 \boldsymbol{f} = \rho_0 \ddot{\boldsymbol{x}} \qquad 在\ \mathscr{R}. \tag{29}$$

上面引进的三种最常用的应力张量 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{T}$ 都同样有效地刻划物体的应力状态，它们分别满足不同的运动方程.

§5 能量守恒律和动能定理

能量守恒律告诉我们：物体动能和内能的时间变化率等于外力对物体所作的功率. 对任意时刻 t 和物体的任意部分 $\mathscr{P}$，下述**能量守恒律**成立:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathscr{P}_t} \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\rho dv + \int_{\mathscr{P}} \Sigma dV\right) = \int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{f}\rho dv + \int_{\partial\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{t}_n da, \tag{1}$$

其中 $\Sigma(\boldsymbol{X}, t)$ 是物体典型点 $\boldsymbol{X}$ 在参考构形的单位体积物质在时刻 t 的**内能**.

利用 (4.9)，散度定理，Cauchy 运动方程和定理 3.4，(1) 式右端可化成

$$\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{f}\rho dv + \int_{\partial\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{t}_n da = \int_{\mathscr{P}_t} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}\rho + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{t})\boldsymbol{\nabla}]dv$$

$$= \int_{\mathscr{P}_t} [\boldsymbol{v}(\rho\boldsymbol{f} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\nabla}) + \boldsymbol{t}:(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{\nabla})]dv$$

$$= \int_{\mathscr{P}_t} \left[\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}}\rho + \boldsymbol{t}:\frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^*)\right]dv \tag{2}$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t} \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\rho dv + \int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{t}:\boldsymbol{D}dv. \tag{3}$$

上式又可改写为

$$\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{v}})\rho dv + \int_{\partial\mathscr{P}_t} \boldsymbol{v}\boldsymbol{t}_n da - \int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{t}:\mathbf{D}dv = 0. \tag{4}$$

对于刚体，上式左端最后一项为零，而前两项代表 D'Alembert 原理下有效力(外力＋惯性力)的功率. 对于变形体，在运动中各物

质点间的距离发生变化，有效力的功率不再为零而等于克服内约束力所作的功。因此，上式最后一项 $-\int_{\mathscr{P}_t} \boldsymbol{t}:\boldsymbol{D}dv$ 可称为**内约束力功率**。

（3）式又可改写成**动能方程**

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\rho dv = \int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}\rho dv + \int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{v}\boldsymbol{t}_n da - \int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{t}:\boldsymbol{D}dv. \tag{5}$$

意思是：动能增加的速率等于外力和内约束力功率之和。

为了今后需要，我们将内约束力功率项写成物质形式。为此，改写（1）式右端，得

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{P}_t}\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}\rho dv + \int_{\partial\mathscr{P}_t}\boldsymbol{v}\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}da &= \int_{\mathscr{P}}\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}\rho_0 dV + \int_{\partial\mathscr{P}}\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{N}dA\\ &= \int_{\mathscr{P}}[\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{f}\rho_0 + \boldsymbol{\tau}\mathring{\boldsymbol{\nabla}}) + \boldsymbol{\tau}:(\dot{\boldsymbol{x}}\otimes\mathring{\boldsymbol{\nabla}})]dV\\ &= \int_{\mathscr{P}}(\dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}}\rho_0 + \boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{F}})dV\\ &= \frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}_t}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\rho dv + \int_{\mathscr{P}}\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}}dV,\end{aligned} \tag{6}$$

其中利用到

$$\dot{\boldsymbol{x}}\otimes\mathring{\boldsymbol{\nabla}} = \overline{\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{\boldsymbol{F}},$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{C}} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{F}}^*\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^*\dot{\boldsymbol{F}})\\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{L}_m^*\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{L}_m\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{F},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{F}} &= (\boldsymbol{F}\boldsymbol{T}):(\boldsymbol{L}_m\boldsymbol{F}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{L}_m\boldsymbol{F}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{L}_m^*\boldsymbol{F}\boldsymbol{T})\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{L}_m^*\boldsymbol{F}) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^*\frac{\boldsymbol{L}_m + \boldsymbol{L}_m^*}{2}\boldsymbol{F}\right)\\ &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{E}}) = \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}}.\end{aligned}$$

（2—6）都是动能定理的不同表现形式。将（3）或（6）代入能量守恒律（1）的右端，应用局部化定理，得能量守恒律的局部形式：

$$\dot{\Sigma} = \mathscr{J}\boldsymbol{t}:\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}}, \tag{7}$$

§6 弹性的本构关系和问题的建立

到目前为止的分析未涉及介质的性质．即使在相同的外力作用下，不同材料构成的物体进行的运动是不同的．例如，在 10 公斤力作用下，相同长度和直径的橡皮筋的伸长远大于钢筋的伸长．因此，要建立一个弹性力学的完整理论以解决实际问题，还需补充反映材料性质的"**本构关系**"．本构关系是材料性质从经验归纳加以抽象化的数学表现．每一个本构关系定义一种理想材料．研究本构关系的建立是理性力学的重要内容．理性力学从极其一般的**确定性公理**"材料在时刻 t 的行为由物体在该时刻以前的全部运动历史所确定"出发，还引进一系列别的公理，如**局部作用公理**，**客观性公理**，**记忆衰减公理**等等，演绎出各种类型材料的本构关系．弹性的本构关系是其中最简单的一种．这种演绎需要较多的准备．由于篇幅所限，而且本书目的不在于此，我们将不沿袭这种做法，而简单地作为一种公设直接接受弹性的本构关系．

6.1 定义 如果物体典型点 $\boldsymbol{X}$ 在任意时刻 t 的应力状态完全由该时刻该点的应变状态确定，则构成该物体的是 **Cauchy-弹性材料**，或简单地，**弹性材料**．□

用第二 Piola-Kirchhoff 应力张量和 Almansi 应变张量表述的弹性本构关系是

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, t)=\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}, t), \boldsymbol{X}). \tag{1}$$

6.2 定义 如果物体典型点 $\boldsymbol{X}$ 在任意时刻 t 的内能密度完全由该时刻该点的应变状态确定，则构成该物体的是 **Green-弹性材料**，或**超弹性材料**．超弹性材料的内能密度 Σ 称为**弹性势**．□

用 Almansi 应变张量表述的超弹性本构关系是

$$\Sigma(\boldsymbol{X}, t)=\hat{\Sigma}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}, t), \boldsymbol{X}). \tag{2}$$

本构函数 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 或 $\hat{\Sigma}$ 不显含 $\boldsymbol{X}$ 的材料称为**均质的**，否则为**非均质的**．在只讨论物质点 $\boldsymbol{X}$ 的局部性质时，材料的均质与否是无关重要的．因此，可以将 (1) 和 (2) 分别简单地写为：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}), \tag{3}$$

$$\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{E}). \tag{4}$$

在运动的初始时刻 t_0，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$. 我们假设物体无初应力，即在时刻 t_0，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}$. 我们也假设 $\Sigma(\boldsymbol{O}) = 0$.

在下面的讨论里，用到能量守恒局部形式的物质描述$(5.7)_{2,3}$:

$$\dot{\Sigma} = \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\tau}:\dot{\boldsymbol{F}}. \tag{5}$$

6.3 推论 超弹性材料必然是弹性的；但弹性材料未必是超弹性的.

证明 设超弹性材料的本构关系为 (4). 在运动中，典型点的应变状态随时间而变化，即 $\boldsymbol{E}$ 是 t 的函数. 根据 (IV.8.6)，求复合函数 $\Sigma(\boldsymbol{E}(t))$ 对 t 的导数，得

$$\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}:\dot{\boldsymbol{E}}.$$

和 $(5)_1$ 比较，有

$$\left(\boldsymbol{T} - \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}\right):\dot{\boldsymbol{E}} = 0.$$

对称仿射量 $\boldsymbol{E}$ 的标量值函数 Σ 的梯度 $\frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}$ 是对称的，因而 $\boldsymbol{T} - \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}$ 也是对称的. 另一方面，对称仿射量 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的任意性使 $\boldsymbol{T} - \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}$ 只能是反称的(根据 (III.9.11)). 同时是对称和反称的仿射量 $\boldsymbol{T} - \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}$ 只能是零仿射量，从而有

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{E}}. \tag{6}$$

这样，Σ 是 $\boldsymbol{E}$ 的函数导致其梯度，从而 $\boldsymbol{T}$ 也是 $\boldsymbol{E}$ 的函数. 因此，(6) 是一种弹性的本构关系 (3). 故“超弹性⇒弹性”.

现设材料为弹性，本构关系为 (3). 将 (3) 代入 (5) 式的中间项，将之从 t_0 到 t 积分. 当 (3) 满足条件

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial E_{ij}}, \tag{7}$$

(5) 式中间项的积分与应变的路径无关，这时我们从 $(5)_1$ 才有

$$\Sigma(\boldsymbol{E}) = \int_{O}^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{G}) : d\boldsymbol{G}. \tag{8}$$

这说明，条件 (7) 保证弹性势 Σ 的存在性，并且是积分上限 $\boldsymbol{E}$ 的函数. 因此"弹性⇒超弹性"是有条件的. □

如果弹性势 Σ 以右 Cauchy-Green 应变张量作为自变量，考虑到 (1.11) 和

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{C}}, \quad \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{C}},$$

用类似的步骤又得

$$\boldsymbol{T} = 2\frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{C}}. \tag{9}$$

如果将 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{F}$ 代入弹性势，又得到

$$\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{F}). \tag{10}$$

要注意，Σ 是 $\boldsymbol{F}$ 的函数是有条件的，必须是以 $\boldsymbol{C}$ 为中间变量的特殊的复合函数. 利用 $(5.7)_3$，又得

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\Sigma}{d\boldsymbol{F}}. \tag{11}$$

对于常用的各向同性材料，我们有

6.4 定义 材料称为**各向同性的**，如果它的本构函数是各向同性的. □

根据第 IV 章各向同性张量函数的理论，我们有

6.5 推论 各向同性弹性材料的本构关系为

$$\boldsymbol{T} = \varphi_1\boldsymbol{C} + \varphi_0\boldsymbol{I} + \varphi_{-1}\boldsymbol{C}^{-1} \tag{12}$$

或(用 Cauchy 应力张量)

$$\boldsymbol{t} = \phi_1\boldsymbol{B} + \phi_0\boldsymbol{I} + \phi_{-1}\boldsymbol{B}^{-1}, \tag{13}$$

其中 $\varphi_1, \cdots, \phi_{-1}$ 是 $\boldsymbol{C}$(或 $\boldsymbol{B}$) 的三个主不变量 I, II 和 III 的函数.

证明 各向同性函数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{C})$ 可表达为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{C}) = \varphi_0'\boldsymbol{I} + \varphi_1'\boldsymbol{C} + \varphi_2'\boldsymbol{C}^2. \tag{14}$$

用 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 点乘 $\boldsymbol{C}$ 的 Cayley-Hamilton 方程去消去 (14) 中的 $\boldsymbol{C}^2$，就得 (12). 同样，用 $\boldsymbol{B}$ 的 Cayley-Hamilton 方程消去下式

$$t = \mathscr{J}^{-1}FTF^* = \mathscr{J}^{-1}(\varphi_1 FCF^* + \varphi_0 FF^* + \varphi_{-1} FC^{-1}F^*)$$
$$= \mathscr{J}^{-1}(\varphi_1 B^2 + \varphi_0 B + \varphi_{-1} I)$$

中的 B^2，就得(13). □

类似地，又有

6.6 推论 各向同性超弹性材料的本构关系为

$$\Sigma = \Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}), \tag{15}$$

$$T = 2\left[\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{II}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right)I - \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{I}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right)C + \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}C^2\right]$$
$$= 2\left[\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \mathrm{I}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right)I - \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}C + \mathrm{III}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}C^{-1}\right], \tag{16}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{III}}}\left[\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}B + \left(\mathrm{II}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} + \mathrm{III}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{III}}\right)I - \mathrm{III}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}B^{-1}\right]. \quad \square \tag{17}$$

总起来，不论是弹性还是超弹性，我们均有由材料性质完全确定的本构关系

$$T = T(C). \tag{18}$$

有了物体的应变状态，就可利用(18)求得相应的应力状态．而由物体的运动 $x(X, t)$ 则可求得变形梯度及各种应变张量．因此，求解弹性力学问题归纳为求物体的运动．考虑到上述这些依赖关系，对于一种给定的本构关系，任一组运动方程总是仅含运动的三个未知函数 $x^i(X, t)$ 的偏微分方程组．例如 Kirchhoff 方程

$$(FT)\mathring{\nabla} + \rho_0 f_m = \rho_0 \ddot{x} \qquad \text{在 } \mathscr{R}, \tag{19}$$

其中 $\rho_0(X)$ 是已知函数，$f_m(X, t) = f(x(X, t), t)$ 也可以认为是给定的．对(19)提初始条件是容易的．边界条件可以在部分 $\partial\mathscr{R}$ 上给定几何约束，即对于属于这部分边界的点 X 给定 $x(X, t)$．而在 $\partial\mathscr{R}$ 的另一部分上可以给定面力，即对这部分的点 X 给定 $FTN(X, t)$，当然，还可以有混合边界条件．实际上，面力在

不同时刻作用在尚属未知的 $\partial r(t)$ 的相应部分上．因此，给定面力条件会有一定困难．人们常引进有时显得人为的**死载荷概念**．除了应力边条件包含待求的 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ 的困难外，方程组 (19) 是一组高度非线性的方程组．至今只有少数简单问题用半反逆法求得精确解．解决具体问题一般用数值方法，如有限元法．弹性的一般理论的方程组的理论近年来有些进展．这里不准备涉及．

对弹性的一般理论感兴趣的读者可参阅拙著"《非线性弹性理论》，科学出版社，1980"．

第 VII 章 经典弹性力学

经典弹性力学是线性理论，没有弹性的一般理论那样复杂，已发展得相当完善，并得到工程实际的广泛应用．它既可以看作一般理论线性化的结果，也可以独立地直接从若干公设出发建立理论．这个理论的历史正是沿后一途径演化过来的．和一般理论线性化的重合是后来才添补上的．本章原则上介绍后一途径，但在论证方法上和一般理论相同的地方，就直接引用上一章的结果．为了说明笛氏张量记法的应用及它的某些优越性，我们有时在 $\mathbf{E}^3$ 的直角坐标系里用分量讨论问题，例如协调条件充分性的证明，等截面柱体扭转数学问题的建立等．除了**连续统假设**，经典弹性接受下述三个公设：

(1) 小位移梯度公设[1]；

(2) 刚化公设；

(3) 线性弹性公设．

在用到这些公设的地方，我们将给出它们的确切含义．了解场论的读者，熟识了第 I 章 § 1 的内容以后就可直接阅读本章．

§ 1 形变的分析

在三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$ 给定笛氏坐标系 $\{x_i\}$ 和它的基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$．设物体典型点在参考构形占有区域 $\mathscr{R}\subset\mathbf{E}^3$．典型点用它在 $\mathscr{R}$ 所在位置的向径 $\boldsymbol{x}(=x_i\boldsymbol{e}_i)$ 表示，而它在当前构形 $r(t)$ 的位置则用 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 表示，其中 $\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i$ 是**位移**场，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是物质点 $\boldsymbol{x}$ 的

---

1) 公设 (1) 用于形变分析．也可等价地采用物理概念更明确的**小伸长度和小转角公设**，但演绎复杂些．可参阅作者的“关于小变形理论的基本假设，**力学与实践**，4(1980)61--64．”

位移向量．为书写简单计，这里和今后省去对时间 t 的依赖性的表示．

考虑物质点 $\boldsymbol{x}$ 邻域的任意点 $\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量，s 是任意不为零的小数．该点在 $\tau(t)$ 的位置是 $\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{n}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{n})$。形变后的物质线素（精确到 $o(s)$）是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}_t &= [\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{n}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{n})]-[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})] \\
&= s\boldsymbol{n}+s(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{n}+o(s).
\end{aligned} \tag{1}
$$

定义 $\boldsymbol{n}$ 方向物质线素的**伸长率**（＝长度比－1）

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n} &:= \lim_{s\to 0}\frac{|\boldsymbol{n}_t|}{|s\boldsymbol{n}|}-1 \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{n})}-1 \\
&= \sqrt{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{n}}-1 \\
&= \sqrt{\boldsymbol{n}[\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{\varepsilon}+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla})]\boldsymbol{n}}-1,
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中仿射量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j := \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}),
$$

$$
\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \tag{3}
$$

并称为 **Cauchy 关系**．**小位移梯度公设**是

$$
\|\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}\|\ll 1. \tag{4}
$$

它导致

$$
\|\boldsymbol{\varepsilon}\|\ll 1, \tag{5}
$$

并且可以忽略 (2) 式方括号内梯度的二次项．于是我们有

$$
\varepsilon_{n}=\sqrt{1+2\boldsymbol{n}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{n}}-1. \tag{6}
$$

考虑到

$$
\boldsymbol{n}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{n}\ll 1 \qquad \forall|\boldsymbol{n}|=1,
$$

将 (6) 式展开为幂级数，并略去高阶小量，最终得

$$
\varepsilon_{n}=\boldsymbol{n}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{n}=\varepsilon_{ij}n_in_j. \tag{7}
$$

这说明，$\boldsymbol{n}$ 方向物质线素的伸长率是仿射量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 在该方向的法分量，

并与 s 无关．有了 $\boldsymbol{\epsilon}$，就可按 (7) 计算任何方向的伸长率．因此，$\boldsymbol{\epsilon}$ 称为**应变张量**，它是**位移梯度** $\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}$ 加法分解

$$\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{w}, \qquad u_{i,j}=\varepsilon_{ij}+w_{ij} \tag{8}$$

的对称部分．

反称部分

$$\boldsymbol{w}=w_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j:=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}),$$

$$w_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i}) \tag{9}$$

并满足 $\|\boldsymbol{w}\|\ll 1$．根据第 III 章 § 9，$\boldsymbol{w}$ 实现小转动．考虑 $\boldsymbol{w}$ 的反偶 $\boldsymbol{\omega}$（是和 Hodge 对偶差一符号的向量）：

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_i\boldsymbol{e}_i=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{w}, \qquad \omega_i=\frac{1}{2}\epsilon_{irs}w_{sr}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega}, \qquad w_{ij}=\epsilon_{ikj}\omega_k. \tag{11}$$

这样，

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{n}=-(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{n})=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}, \tag{12}$$

即

$$w_{ij}n_j=\epsilon_{irs}\omega_r n_s.$$

从 (12) 可以看出，向量场 $\boldsymbol{\omega}$ 在每物质点 $\boldsymbol{x}$ 将每物质线素转过一个小角度 $|\boldsymbol{\omega}|$．$\boldsymbol{w}$ 称为**转动张量**．

于是，形变后的物质线素 $\boldsymbol{n}_s$（线性依赖于 s，现取 $s=1$ 为代表）在公设 (4) 下，近似地可写成

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{n}. \tag{13}$$

从而有**形变基本定理**：物体物质点（连同它的邻域）的形变由**平移**，**转动**和**纯变形**加法组成，分别由 $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}$ 代表．

在经典理论里，只有一种应变张量．

§ 2 协 调 方 程

给定位移场 u_i，就可用 Cauchy 关系 (1.3)

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{1}$$

计算唯一确定的应变场。但任意给定的对称仿射量场不一定是对应于某位移场的应变场。

2.1 定理 给定的对称仿射量场 ε_{ij} 是应变场的充要条件是

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{ik,jl}-\varepsilon_{jl,ik}=0. \tag{2}$$

证明 显然，即使 ε_{ij} 是应变场，它也不唯一确定位移场，因为 u_i 可以包含并不影响应变场的任意刚体运动. 我们通过规定某物质点 $\boldsymbol{x}^0$ 的位移 $u_i(\boldsymbol{x}^0)=u_i^0$ 和刚性转动 $\omega_{ij}(\boldsymbol{x}^0)=\omega_{ij}^0$ 来消除这种任意性.

条件 (2) 的必要性可以通过将 (1) 代入验证.

为了证充分性，我们用 Cèsaro 积分求任意点 $\boldsymbol{x}$ 的位移向量 (对单连通物体):

$$\begin{aligned}u_i(\boldsymbol{x})&=u_i^0+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}du_i=u_i^0+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}u_{i,j}dx_j'\\&=u_i^0+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}\varepsilon_{ik}dx_k'+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}\omega_{ij}dx_j'.\end{aligned} \tag{3}$$

对最后一项进行分部积分

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}\omega_{ij}dx_j'&=\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}\omega_{ij}d(x_j'-x_j)\\&=\omega_{ij}(x_j'-x_j)\Big|_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}(x_j-x_j')\omega_{ij,k}dx_k',\end{aligned}$$

就得

$$\begin{aligned}u_i(\boldsymbol{x})&=u_i^0+\omega_{ij}^0(x_j-x_j^0)+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}[\varepsilon_{ik}\\&\quad+(x_j-x_j')\omega_{ij,k}]dx_k'\\&=u_i^0+\omega_{ij}^0(x_j-x_j^0)+\int_{\boldsymbol{x}^0}^{\boldsymbol{x}}[\varepsilon_{ik}\\&\quad+(x_j-x_j')(\varepsilon_{ki,j}-\varepsilon_{kj,i})]dx_k',\end{aligned} \tag{4}$$

其中考虑到

$$\begin{aligned}\omega_{ij,k}&=\frac{1}{2}(u_{i,jk}-u_{j,ik})+\frac{1}{2}(u_{k,ij}-u_{k,ji})\\&=\frac{1}{2}(u_{i,k}+u_{k,i})_{,j}-\frac{1}{2}(u_{j,k}+u_{k,j})_{,i}.\end{aligned}$$

注意，带撇的是积分变量．位移 $u_i(\boldsymbol{x})$ 被唯一确定，如果 (4) 式的线积分与路径无关，其充要条件是被积函数满足

$$
\begin{aligned}
0 &= [\varepsilon_{jk} + (x_i - x_i')(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i})]_{,l} - [\varepsilon_{jl} + (x_i \\
&\quad - x_i')(\varepsilon_{li,j} - \varepsilon_{lj,i})]_{,k} \\
&= \varepsilon_{jk,l} - \varepsilon_{jl,k} - \delta_{il}(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{kj,i}) + \delta_{ik}(\varepsilon_{li,j} - \varepsilon_{lj,i}) \\
&\quad + (x_i - x_i')(\varepsilon_{ki,jl} - \varepsilon_{kj,il} - \varepsilon_{li,jk} + \varepsilon_{lj,ik}).
\end{aligned} \tag{5}
$$

前面各项互相消去，最后一项的前面因子 $(x_i - x_i')$ 可以任意选择，因此后面的因子为零才能满足 (5)，而这正是条件 (2)． □

从表面上看，(2) 包含 81 个条件，但实际上只有 6 个是独立的．事实上，(2) 可写成

$$\varepsilon_{[i|[j,k]|l]} = 0.$$

由于两组指标各自反称，上式又等价于它的对偶

$$e_{ril}e_{sjk}\varepsilon_{ij,kl} = 0. \tag{6}$$

(6) 式只含两个自由指标，是一个仿射量条件．从下式还可以看到，这个条件是对称的：

$$e_{sil}e_{rjk}\varepsilon_{ij,kl} = e_{sjk}e_{ril}\varepsilon_{ji,lk} = e_{ril}e_{sjk}\varepsilon_{ij,kl}.$$

所以，实际上只有 6 个代数独立的条件．

§3 动力学分析

基本上和一般理论相应的部分相同，但又有原则差别．差别在于刚化公设的引进．在一般理论里，动量和动量矩平衡律是对当前构形 $r(t)$ 的任意部分 $\mathscr{P}_t$ 而言的．而在经典理论里，由于小变形，在应用平衡律时把物体看成在参考构形 $\mathscr{R}$ 原地不动，物体好像刚化了似的，而本来作用在 $r(t)$ 的外力也相应地移到 $\mathscr{R}$，这就是**刚化公设**．现在就只有一种描述法——物质描述．在刚化公设下，质量密度不发生变化：$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \rho_0(\boldsymbol{x})$，质量自然守恒．而速度和加速度就是

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t),$$
$$\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t) = \ddot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t).$$

根据上一章 § 3 的 Cauchy 应力张量存在定理，存在仿射量场 $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$，使得在物质点 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{R}$ 以 $\boldsymbol{n}$ 为单位法向量的截面上应力向量为

$$\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{\sigma n}, \qquad t_{ni} = \sigma_{ij} n_j. \tag{1}$$

因而，$\boldsymbol{\sigma}$ 刻划物体的应力状态，称为**应力张量**．经典理论也只有一种应力张量．

根据动量平衡律，对物体的任意部分 $\mathscr{P} \subset \mathscr{R}$，在每时刻 t，有

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathscr{P}} \dot{\boldsymbol{u}} \rho dv = \int_{\mathscr{P}} \rho \boldsymbol{f} dv + \int_{\partial \mathscr{P}} \boldsymbol{t}_n da, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 为体力．由于 $\mathscr{P}$ 不随时间而变，可直接在积分号下对 t 求导．应用(1)，散度定理和局部化定理，依次有

$$\int_{\mathscr{P}} (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla} + \rho \boldsymbol{f} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) dv = 0,$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \qquad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = \ddot{u}_i. \tag{3}$$

这就是经典理论的唯一的**运动方程**．动量矩平衡律要求应力张量是对称的：

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{4}$$

§ 4 广义 Hooke 定律

经典理论的本构关系接受**线性弹性公设**，即应力-应变关系是线性的．根据商法则，有

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\epsilon}, \qquad \sigma_{ij} = E_{ijrs} \varepsilon_{rs}, \tag{1}$$

其中四阶张量

$$\boldsymbol{E} = E_{ijrs} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_s$$

称为**弹性张量**．如果 $\boldsymbol{E}$ 不依赖于 $\boldsymbol{x}$，物体是**均质的**．应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应变张量 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的对称性使得 E_{ijrs} 分别关于前两个下标和后两个

下标是对称的

$$E_{ijrs} = E_{jirs} = E_{ijsr}. \tag{2}$$

式 (1) 是 Cauchy-弹性本构关系. 如果还满足

$$E_{ijrs} = E_{rsij}, \tag{3}$$

则 (1) 成为 Green-弹性的条件

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{rs}} = \frac{\partial \sigma_{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

满足. 这时存在弹性势,在经典理论里常称为**应变比能**,并记作

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}:d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}):d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} d(\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}\,E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \end{aligned} \tag{4}$$

这里接受了 $W(\boldsymbol{o}) = 0$. 可见, W是应变张量的二次型. 物理上还要求正定性. 现在显然有

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{dW}{d\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \tag{5}$$

用热力学定律可以论证, 对经常出现的静力学情形(等温过程)和进行高速振动的动力学过程(绝热过程)应变比能函数是存在的. 因此,在经典理论里我们总假定弹性是 Green 意义的, 并简称为弹性. 对称性 (2) 和 (3) 使得弹性张量只有 21 个独立常数.

根据第 IV 章定理 5.1, 各向同性弹性体的本构关系是

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{6}$$

称为**广义 Hooke 定律**. 这时

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{7}$$

它自然满足条件 (3). 仅有的两个独立弹性常数

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0 \tag{8}$$

称为 **Lamé 常数**. 现在应变能表达式是

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{9}$$

(8) 和 (9) 证实，在各向同性情形，W 的正定性.

为了求实践上常常用到的 (6) 的逆关系，取 (6) 的迹

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma} = (3\lambda + 2\mu)\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon},$$

代入 (6) 并移项，就得各向同性的应变-应力关系:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I} + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\sigma},$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}. \tag{10}$$

§ 5 数学问题的建立

我们这里仅就各向同性体建立数学问题. 刻划物体各种状态的三组量 $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ 和 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$ 共含 15 个待求函数. 我们前面得到了 15 个方程:

Cauchy 关系 $\quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$ (1)

Hooke 定律 $\quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},$ (2)

运动方程 $\quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho\ddot{u}_i.$ (3)

这是问题的完全方程组. 现在待求函数包含位移场，协调方程 (2.2) 是自然满足的，不必列进去. 也有不求位移场的解法，这时协调方程必须列入. 这里不涉及这种方法. 三组待求函数中，位移场是最基本的，可以用 (1) 代入 (2)，再代入 (3)，就得到只含 $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ 的方程组

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \rho f_i = \rho\ddot{u}_i \tag{4}$$

或

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\ div}\ \boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{f} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \quad 在\ \mathscr{R}, \tag{5}$$

称为 **Navier 方程**，其中 ρ 和 $\boldsymbol{f}$ 是给定函数. 这是二阶双曲型偏微分方程组，还需要根据问题给出定解条件.

(1) 初条件

$$\left.\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{x}, 0) &= \mathring{u}_i(\boldsymbol{x}) \\ \dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0) &= \mathring{v}_i(\boldsymbol{x}) \end{aligned}\right\} \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{R}. \tag{6}$$

(2) 边条件可有

(i) **位移边条件(第一类)**

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \bar{u}_i(\boldsymbol{x}, t), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{R}, \ t \geqslant t_0. \tag{7}$$

(ii) **应力边条件(第二类)**

$$\sigma_{ij}n_j = F_i(\boldsymbol{x}, t), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\mathscr{R}, \ t \geqslant t_0, \tag{8}$$

即

$$\lambda u_{k,k}n_i + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = F_i(\boldsymbol{x}, t) \tag{9}$$

这是对 u_i 的导数的条件,因而是第二类边条件.

(iii) **混合边条件(第三类)**

在 $\partial\mathscr{R}$ 的部分 $(\partial\mathscr{R})_u$ 上给定位移,而在

$$(\partial\mathscr{R})_F = \partial\mathscr{R} - (\partial\mathscr{R})_u$$

上给定面力. 总言之,在边界上每点必须给定三个边条件,而且是在三个非共面的方向上各给定一个条件. 这三个条件甚至可以是不同类型的,例如某方向给定该方向的位移分量,而另一方向则给定面力分量. 这种边条件称为**第四类**的. 光滑刚印问题在接触边界处的条件就属于第四类.

如果物体进行缓慢运动,当 $t \to \infty$ 时,物体趋于静止平衡状态. 方程 (5) 的右端为零,方程变成椭圆型的. 这时就有**静力学问题**,在数学上是 Navier 方程的边值问题.

长期以来,数学家和力学家们在弹性力学的数学问题上做了大量的理论研究,提出了众多的解法. 经典弹性已是一门成熟的力学分支. 尽管如此,求解具体问题还是不易的. 人们往往根据物体的具体形状和外力作用的特殊性而将问题从数学上约化. 下一节举扭转问题为例说明. 这例子也是笛氏张量记法的极好练习.

§6 扭转问题

侧面自由的等截面长柱体只在两端受归结为沿轴向的合力矩 M 的面力作用(图 7),端面面力分布并未给出,而只要求端面面力

的合力和合力矩等于给定值．这不是一个弹性力学问题的标准提法．但这正给我们提供寻找最容易求得解的可能性．

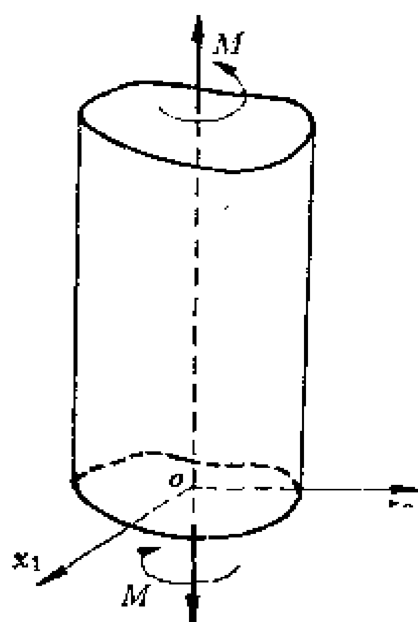


图 7.

材料力学的初等解告诉我们，扭转的圆柱体的各横截面形状不变地（仍为圆）绕轴转过一个角度．受这个启发，我们对非圆截面柱体扭转的形变作一些猜想：也假设每截面刚性地转过一个角度，但不要求截面仍保持为平面．下面将看到，这种猜想是对的．

我们面临的是一个无体力作用的静力学问题．

我们将笛氏坐标系 $\{x_1, x_2, z\}$ 的原点 O 定在柱体的底面，z-轴平行于柱轴，基向量为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{k}\}$．今后希腊指标从 1 到 2 取值．每截面所在平面是一个 2 维欧氏空间 $\mathbf{E}^2$．在这个平面内向径记为

$$\boldsymbol{r} = x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{1}$$

我们还将用到

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta, \\
&\varepsilon_{\alpha\beta} = [\boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \boldsymbol{k}], \\
&\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\rho} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\gamma} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\gamma} & \delta_{\beta\rho} \end{vmatrix} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma}, \\
&\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

假定在 z 处的截面 Ω 转过角度

$$\theta = \alpha z, \tag{3}$$

α 是一个常数，称为**扭率**，是每单位高度的相对扭转角．记位移向量为

$$\boldsymbol{u} = u_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + w\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

由于小变形，$\theta \ll 1$，故有

$$u_\alpha = (\theta\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_\alpha = \alpha z x_\beta [\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{e}_\alpha] = -\alpha z \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta. \tag{5}$$

又假定轴向位移与 z 无关,即各截面翘曲相同:

$$w(\boldsymbol{r}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

$\varphi(\boldsymbol{r})$ 称为**翘曲函数**.

总的说来,我们对位移作了假设 (5) 和 (6), 其中包含一个待定常数 α 和函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$. 我们将看到,这种假设是正确的. 下面先检验各组方程.

(i) 将 (5, 6) 代入 Cauchy 关系 (5.1), 得

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0, \qquad \varepsilon_{zz} = 0, \tag{7}$$

余下两个不恒为零的应变分量与 z 无关:

$$\varepsilon_{z\alpha} = \frac{1}{2}\left(w_{,\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\right) = \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta}x_\beta). \tag{8}$$

(ii) 因 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{zz} = 0$, Hooke 定律 (5.2) 变成

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}.$$

于是

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \qquad \sigma_{zz} = 0. \tag{9}$$

不恒为零的应力分量也就只有两个(也不依赖于 z):

$$\sigma_{z\alpha} = 2\mu\varepsilon_{z\alpha} = \alpha\mu(\varphi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta}x_\beta). \tag{10}$$

(iii) 将 (9,10) 代入平衡方程 (5.3), 依次得

$$\sigma_{z\alpha,\alpha} = 0$$

$$\varphi_{,\alpha\alpha} - e_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha} = 0, \tag{11}$$

$$\varphi_{,\alpha\alpha} = 0,$$

$$\nabla^2\varphi = 0 \qquad 在\ \Omega. \tag{12}$$

可以看出,如果 φ 是调和函数, 则位移假设 (5, 6) 满足平衡方程 (5.3), 并且给出应变分布 (7, 8) 和应力分布 (9, 10).

余下问题是看 (5, 6) 能否满足边条件,并最终确定 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 和 α. 为此,要做些准备工作,考虑任意截面 Ω 如图 8, 外边界为 C_0, 内边界为 $C_i(i = 1, \cdots, p)$. 边界的单位外法向量为 $\boldsymbol{n} = n_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$, 边界弧长参量 s 增加的方向使区域 Ω 留在左手边. 于是, 边界的单位切向量是

$$\boldsymbol{t} = t_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{dx_\alpha}{ds}\boldsymbol{e}_\alpha, \quad t_\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}. \tag{13}$$

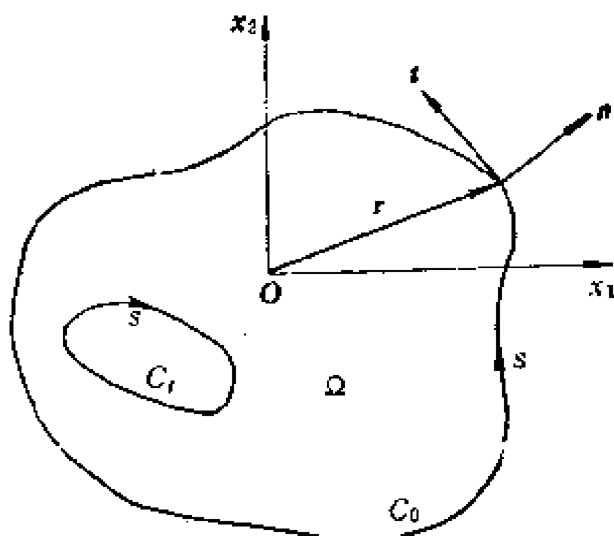


图 8.

于是，$\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}\}$ 是 E^3 在柱体侧边上的局部正标准正交基．从而

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{k} = \frac{dx_\alpha}{ds} \boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{k} = -\frac{dx_\alpha}{ds} e_{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\beta = e_{\alpha\beta} t_\beta \boldsymbol{e}_\alpha, \quad (14)$$

并且

$$n_\alpha = e_{\alpha\beta} t_\beta, \qquad t_\alpha = -e_{\alpha\beta} n_\beta. \quad (15)$$

现在检验边条件．

(i) 自由的侧面边界的单位外法向量为 $(n_1, n_2, 0)$．考虑到 (9, 10)，不恒满足的应力边条件 (5.9) 只有

$$\sigma_{z\alpha} n_\alpha = 0 \quad 即 \quad (\varphi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta} x_\beta) n_\alpha = 0. \quad (16)$$

根据边界法向导数的定义，应用 (15) 和 $(13)_2$，上式变为

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}} = \varphi_{,\alpha} n_\alpha = e_{\alpha\beta} x_\beta n_\alpha = x_\alpha t_\alpha = x_\alpha \frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(x_\alpha x_\alpha)}{ds}.$$

于是，侧面边条件归结为

$$\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds} \qquad 在\ \partial\Omega. \quad (17)$$

方程 (12) 和条件 (17) 使得，翘曲函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 是平面区域 Ω 上 Neumann 问题

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi = 0 && 在\ \Omega, \\ &\frac{d\varphi}{d\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{ds} && 在\ \partial\Omega \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

的解.这个解只依赖于截面几何形状,与端面条件和 M 的值无关.
问题 (18) 解的存在的必要条件是自然满足的,因

$$\oint_{\partial\Omega}\frac{d\varphi}{dn}ds=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}dr^2=0.$$

问题的解并不唯一,可差一个任意常数.

(ii) 上端面的外法向为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$. 合力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{o} \tag{19}$$

和合力矩为

$$\boldsymbol{M}=M\boldsymbol{k}. \tag{20}$$

面力有公式

$$\boldsymbol{t_k}=\boldsymbol{\sigma n}=\sigma_{ij}n_j\boldsymbol{e}_i=\sigma_{iz}\boldsymbol{e}_i=\sigma_{z\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha=\alpha\mu(\varphi_{,\alpha}-\epsilon_{\alpha\beta}x_\beta)\boldsymbol{e}_\alpha, \tag{21}$$

它是切于端面的. 利用结果(用到 (11))

$$\begin{aligned}\varphi_{,\alpha}-\epsilon_{\alpha\beta}x_\beta&=\delta_{\alpha\gamma}(\varphi_{,\gamma}-\epsilon_{\gamma\beta}x_\beta)=x_{\alpha,\gamma}(\varphi_{,\gamma}-\epsilon_{\gamma\beta}x_\beta)\\&=[x_\alpha(\varphi_{,\gamma}-\epsilon_{\gamma\beta}x_\beta)]_{,\gamma},\end{aligned}$$

计算端面合力确实满足 (19), 因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=\int_\Omega\boldsymbol{t_k}da=\alpha\mu\int_\Omega(\varphi_{,\alpha}-\epsilon_{\alpha\beta}x_\beta)da\boldsymbol{e}_\alpha=\alpha\mu\int_\Omega[x_\alpha(\varphi_{,\gamma}\\-\epsilon_{\gamma\beta}x_\beta)]_{,\gamma}da\boldsymbol{e}_\alpha=\alpha\mu\oint_{\partial\Omega}x_\alpha(\varphi_{,\gamma}-\epsilon_{\gamma\beta}x_\beta)n_\gamma ds\boldsymbol{e}_\alpha=\boldsymbol{o},\end{aligned}$$

其中用到散度定理和边条件 (16).

面力是切于端面的, 故其合力矩和 z 轴方向相同. 条件 (20) 满足,如果

$$\begin{aligned}M&=\int_\Omega\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t_k})da=\int_\Omega\boldsymbol{k}(x_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\times\sigma_{z\beta}\boldsymbol{e}_\beta)da\\&=\int_\Omega\epsilon_{\alpha\beta}x_\alpha\sigma_{z\beta}da=\alpha\mu\int_\Omega\epsilon_{\alpha\beta}x_\alpha(\varphi_{,\beta}-\epsilon_{\beta\gamma}x_\gamma)da\\&=\alpha\mu\int_\Omega(\epsilon_{\alpha\beta}x_\alpha\varphi_{,\beta}+x_\alpha x_\alpha)da.\end{aligned} \tag{22}$$

记

$$D:=\mu\int_\Omega(r^2+\epsilon_{\alpha\beta}x_\alpha\varphi_{,\beta})da,$$

并称为**抗扭刚度**, 它只依赖于截面形状和弹性常数. 这时, (22)

变成

$$\alpha=\frac{M}{D}. \tag{23}$$

给定合力矩的值 M 就唯一确定扭率. 预先没有给定的端面面力分布具有 (21) 所规定的分布. 至此,这样提法的扭转问题全部得到解决.

下面讨论另一种方法. 不去解 Neumann 问题 (18) 而去求调和函数 φ 的共轭函数 ψ, 两者满足 Cauchy-Riemann 条件:

$$\varphi_{,\alpha}=e_{\alpha\beta}\psi_{,\beta}. \tag{24}$$

ψ 除了满足 Laplace 方程, 还要满足一定的边条件. 我们从 φ 的边条件求这边条件.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{dr^2}{ds}&=\frac{d\varphi}{dn}=\varphi_{,\alpha}n_\alpha=e_{\alpha\beta}\psi_{,\beta}e_{\alpha\gamma}t_\gamma=\psi_{,\alpha}t_\alpha\\&=\psi_{,\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}=\frac{d\psi}{ds}.\end{aligned} \tag{25}$$

在每一周界将上式对弧长 s 积分,得

$$\psi|_{C_i}=\frac{r^2}{2}+k_i\quad(i=0,\ 1,\cdots,\ p,\ k_0=0). \tag{26}$$

如果由此解出的 ψ 能返回 (18) 的解 φ, 则扭转问题也就解决了. 首先,将 (26) 对 s 求导,又回到 (25). 就是说,如果能求得 φ, 它必满足翘曲函数的边条件. 问题能否从 ψ 求 φ. 回答是肯定的. 为了证明这一点,需要一个事实: 对任意区域 $\omega\subset\Omega$, 有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\omega}\varphi_{,\alpha}dx_\alpha&=\oint_{\partial\omega}e_{\alpha\beta}\psi_{,\beta}t_\alpha ds=-\oint_{\partial\omega}\psi_{,\alpha}n_\alpha ds\\&=-\int_\omega\psi_{,\alpha\alpha}da=0,\end{aligned}$$

其中用到 (24), (15) 和 ψ 的调和性. 由此, 求得 ψ, 就可用下述路径无关积分求 φ

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r})&=\varphi(\boldsymbol{r}^0)+\int_{\boldsymbol{r}^0}^{\boldsymbol{r}}\varphi_{,\alpha}dx_\alpha=\varphi(\boldsymbol{r}^0)-\int_{\boldsymbol{r}^0}^{\boldsymbol{r}}\psi_{,\alpha}n_\alpha ds\\&=\varphi(\boldsymbol{r}^0)-\int_{\boldsymbol{r}^0}^{\boldsymbol{r}}\frac{d\psi}{dn}ds.\end{aligned} \tag{27}$$

还得交待边条件(26)中的积分常数 k_i 问题. 取 $k_0=0$ 是可以的,因为求 φ 只用到 ϕ 的导数. 其余 p 个 k_i 由所谓的**周期性条件**确定.因为 $w(\boldsymbol{r})$是单值的, $\varphi(\boldsymbol{r})$ 也必为单值(准确到一个常数,它可由给定 $\varphi(\boldsymbol{r}^0)$ 确定).则由(27)可知,对于任何闭迴路,必须有

$$\oint \frac{d\phi}{dn} ds = 0.$$

如果取 p 个内边界为这些闭迴路,就得 p 个独立的用以确定 k_i 的条件.

总结起来,扭转问题也归结为求 $\phi(r)$ 的 Dirichlet 问题:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\phi = 0 && \text{在}\Omega, \\ &\phi|_{c_i} = \frac{r^2}{2} + k_i && (i = 0, 1, \cdots, p, k_0 = 0), \\ &\oint_{c_i} \frac{d\phi}{dn} ds = 0 && i = 1, \cdots, p. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

由此解得只与截面形状有关的 ϕ, 并从而得

$$\left.\begin{aligned} &w(\boldsymbol{r}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{r}) = -\alpha\int_{r^0}^{r} \frac{d\phi}{dn} ds, \ (\text{设}\varphi(r^0) = 0), \\ &\sigma_{z\alpha} = \alpha\mu(\varphi_{,\alpha} - e_{\alpha\beta}x_\beta) = \alpha\mu e_{\alpha\beta}(\phi_{,\beta} - x_\beta), \\ &D = \mu\int_\Omega (r^2 - x_\alpha\phi_{,\alpha}) da. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

还有引进 **Prandtl 应力函数** $\Phi(\boldsymbol{r})$ 的解法,它导至 Poisson 方程的第一边值问题. 这里就不再赘述了.

第 VIII 章　$\mathbf{E}^n$ 曲线和曲面上的张量分析

作为张量理论的另一方面的应用，本章扼要地介绍 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 曲线和曲面的一些主要性质．这里曲面指 $\mathbf{E}^n$ 中的 $n-1$ 维超曲面．曲线（或曲面）的切向量场在每一点的值属于曲线（或曲面）在该点的切空间．在每个切空间可以按一般的代数法则定义切张量，并进行代数运算．曲线和曲面切张量场的绝对微分学的思想是相同的，对曲线来说则更简单．我们将只介绍曲面的张量分析．我们将遵循第 V 章 §12 的方便做法进行讨论，把向量（张量）看成在 $\mathbf{E}^n$ 是自由的．

§1　曲　线

1.1 定义　设 $I\subset\mathbf{R}$ 是一个开区间，光滑映射 $C:I\to\mathbf{E}:t\longmapsto x(t)$ 称为 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}$ 中的一条**曲线**（严格地应该说，**曲线段**），t 为曲线的**参量**．曲线是可以定向的．一般取参量增加的方向为曲线的**正向**．如果 C 的**速度向量** $\dot{x}(t):=\dfrac{dx(t)}{dt}\neq \boldsymbol{o},\ \forall t\in I$，则称 C 为**正则曲线**．□

今后只讨论正则曲线，并且假定曲线是**简单的**（即不自相交的）．

1.2 定义　光滑映射 $\boldsymbol{u}:C\to\mathscr{V}:x(t)\longmapsto\boldsymbol{u}(x(t))\in T_{x(t)}\mathbf{E}$ 称为 C 上的向量场．若 $\boldsymbol{u}(t)\in\operatorname{span}\{\dot{x}(t)\}=T_{x(t)}C$，则 $\boldsymbol{u}$ 称为 C 上的**切向量场或曲线向量场**．□

其实，$\{t\}$ 就是曲线 C 上的一个坐标系，在点 $x(t)$ 的基向量是 $\dot{x}(t)$．由此又可得对偶基．每个切向量可在基上分解，在每个切空间 $T_{x(t)}C$ 可建立张量代数，并可在曲线上进行张量分析．我们

不准备讨论这个问题，而在后面将略述类似的曲面上的张量分析.下面讲的参量变换实际上就是坐标转换.

1.3 定义 微分同胚 $\phi:\tilde{I}\to I:\tilde{t}\longmapsto t$ 称为曲线 C 的**参量变换**. 这时我们有参量为 $\tilde{t}$ 的曲线

$$\tilde{C}=C\circ\phi:\tilde{I}\to\mathbf{E}:\tilde{t}\longmapsto x(t(\tilde{t})). \tag{1}$$

如果 $\phi'=\dfrac{dt}{d\tilde{t}}>0$，则 ϕ 称为**保定向的**. □

由于

$$\frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}}=\frac{dx(t)}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}, \tag{2}$$

可得

1.4 推论 曲线的正则性与参量的选择无关.

1.5 定义 正则曲线 C 从参量 t_0 到 t 处的弧长定义为

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\dot{x}(t)|\,dt=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|dt. \tag{3}$$

1.6 推论 曲线弧长与参量的选择无关.

证明 设曲线 C 上两点 x_0 和 x 在两种参量 $t,\tilde{t}$ 下分别有参量值 $t_0,\tilde{t}_0$ 和 $t,\tilde{t}$. 不失一般性，设参量变换是保定向的. 令 $s(t)$和$\tilde{s}(\tilde{t})$是曲线从点 x_0 到点 x 在两种参量下的弧长，则利用 (2) 和 (3)，有

$$\begin{aligned}s(t)&=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|dt=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{d\tilde{t}}\right|d\tilde{t}\\&=\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}}\left|\frac{dx(\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right|d\tilde{t}=\tilde{s}(\tilde{t}).\end{aligned}$$

1.7 定理 曲线的弧长 s 可以作为参量，称为**弧长参量**. 当且仅当在弧长参量下，曲线 C 的速度向量处处为单位向量.

证明 由(3)可见，$\phi:t\longmapsto s(t)$是微分同胚，且$\dfrac{ds(t)}{dt}=\left|\dfrac{dx(t)}{dt}\right|>0$. 因此，存在微分同胚 $\phi^{-1}:s\longmapsto t(s)$. 取 s 作为新的参量，则由 $1=s'(s)=|x'(s)|$ 可知，以弧长为参量的曲线的速度向量 $x'(s)$ 是单位向量(约定，对弧长参量的导数用撇表示). 反过来，若速度

向量处处为单位向量：$\left|\frac{dx(t)}{dt}\right| = 1$，则由 (3)

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{dx(t)}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0. \square$$

1.8 定理 设曲线 C 的弧长参量为 s，$\boldsymbol{u}$ 是 C 上的光滑向量场，则

$$|\boldsymbol{u}'(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|, \tag{4}$$

其中 $\Delta\theta$ 表示 $\boldsymbol{u}(s+\Delta s)$ 与 $\boldsymbol{u}(s)$ 的夹角.

证明

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{u}'(s)| &= \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(s+\Delta s) - \boldsymbol{u}(s)}{\Delta s}\right| \\
&= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\boldsymbol{u}(s+\Delta s) - \boldsymbol{u}(s)|}{|\Delta s|} \\
&= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left|2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|}{|\Delta s|} \\
&= \lim_{\Delta s \to 0} \left(\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right| \cdot \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \right) = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.
\end{aligned}$$

§2 Frenet 标架和曲线的曲率

2.1 定义 曲线 $C: t \longmapsto x(t)$ 上的 n 个光滑向量场 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，满足

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1}$$

称为**活动 n-标架**. 如果 $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$ 和 $t \in I$，$x(t)$ 的 k 阶导数 $x^{(k)}(t) \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_k(t)\}$，则该标架称为 **Frenet 标架**. □

C 的向量场 $\boldsymbol{u}$ 对 t 的导数按第 V 章 §12 方式理解. 不是每一条曲线都有 Frenet 标架.

2.2 定理（Frenet 标架的存在唯一性定理） 若在曲线 C 的每一点，$\{\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)\}$ 是线性无关向量组，则存在唯一的 Frenet 标架，满足

(i) 对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，$\{\dot{x}(t), \cdots, x^{(k)}(t)\}$ 和 $\{\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_k(t)\}$ 有相同定向；

(ii) $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是正标架。

证明 类似第 II 章定理 4.2，采用 Gram-Schmidt 正交化过程和归纳法进行构造性证明. 根据 Frenet 标架的定义，$\dot{x}(t)$ 由 $\boldsymbol{e}_1(t)$ 表出，即 $\boldsymbol{e}_1(t)$ 是由 $\dot{x}(t)$ 表示的单位向量. 这时可能有 $\boldsymbol{e}_1(t) = \pm \dot{x}(t)/|\dot{x}(t)|$。按条件 (i) 要求，只能有

$$\boldsymbol{e}_1(t) = \dot{x}(t)/|\dot{x}(t)|. \tag{2}$$

设按 Frenet 标架定义和条件 (i)，$\{\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}(t)\}$ 已由 $\{\dot{x}(t), \cdots, x^{(j-1)}(t)\}$ 唯一确定. 自然有

$$\mu \boldsymbol{e}_1(t) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j-1}(t) = \dot{x}(t) \wedge \cdots \wedge x^{(j-1)}(t), \ \mu > 0. \tag{3}$$

今按定义要求的表示

$$x^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{j} a_{jk}(t) \boldsymbol{e}_k(t) \tag{4}$$

构造 $\boldsymbol{e}_j(t)$. 由假设的线性无关性，$x^{(j)}(t)$ 不能由前 $j-1$ 个导数表示，从而不能只由 $\{\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}(t)\}$ 表出，因此 $a_{jj}(t) \neq 0$. 上式右端前 $j-1$ 个系数是唯一确定的，因为依次用 $\boldsymbol{e}_1(t), \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}(t)$ 点积上式就得

$$a_{jk}(t) = x^{(j)}(t) \boldsymbol{e}_k(t), \qquad k = 1, \cdots, j-1. \tag{5}$$

改写 (4) 式给出唯一确定的向量 $\tilde{\boldsymbol{e}}_j(t)$（还不是单位向量）

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_j(t) = a_{jj}(t) \boldsymbol{e}_j(t) = -\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \boldsymbol{e}_k(t) + x^{(j)}(t). \tag{6}$$

这里系数可以取 $a_{jj}(t) = \pm |\tilde{\boldsymbol{e}}_j(t)|$，从而 $\boldsymbol{e}_j(t)$ 也有两种符号可能性。将 (6) 式两端分别和 (3) 外积，得

$$(\mu a_{jj}(t)) \boldsymbol{e}_1(t) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j-1}(t) \wedge \boldsymbol{e}_j(t) = \dot{x}(t) \wedge \cdots \wedge x^{(j)}(t). \tag{7}$$

可见，条件 (i) 要求 $\mu a_{jj}(t) > 0$，这就唯一地确定

$$a_{jj}(t) = |\tilde{\boldsymbol{e}}_j(t)| > 0, \qquad \boldsymbol{e}_j(t) = \tilde{\boldsymbol{e}}_j(t)/|\tilde{\boldsymbol{e}}_j(t)|. \tag{8}$$

按归纳法，这就证明了 Frenet 标架前 $n-1$ 个向量由线性无关的向量组 $\{x(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)\}$ 唯一确定，并满足条件(i)。$n-1$ 维子空间 $\mathrm{span}\{e_1(t),\cdots,e_{n-1}(t)\}\subset T_{x(t)}\mathbf{E}$ 的正交补是一维的。这样确定 $e_n(t)$ 的符号，使 $\{e_i(t)\}$ 成为正标架。从而完成定理的证明。

2.3 定理 设 $\{e_i(t)\}$ 是曲线 C 的 Frenet 标架，则

$$\dot{e}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(t)e_j(t), \tag{9}$$

满足

$$\omega_{ij}(t)=-\omega_{ji}(t), \tag{10}$$

$$\omega_{ij}(t)=0 \qquad \forall j>i+1. \tag{11}$$

证明 将(1)对 t 求导，就得 $\dot{e}_i(t)$ 的分量矩阵的反称性(10)：

$$\omega_{ij}(t)=\dot{e}_i(t)e_j(t)=-\dot{e}_j(t)e_i(t)=-\omega_{ji}(t).$$

方程组(4)的系数矩阵是三角阵，根据$(8)_1$，其行列式

$$\det[a_{ij}(t)]=\prod_{k=1}^{n}a_{kk}(t)>0.$$

因此，$[a_{ij}(t)]$ 非退化，存在逆 $[b_{ij}(t)]$，也是三角阵，使得

$$e_i(t)=\sum_{j=1}^{i}b_{ij}(t)x^{(j)}(t), \qquad b_{ii}(t)=1/a_{ii}(t)>0. \tag{12}$$

将上式对 t 求导，得

$$\dot{e}_i(t)=\sum_{j=1}^{i}(\dot{b}_{ij}(t)x^{(j)}(t)+b_{ij}(t)x^{(j+1)}(t)),$$

将(4)代入，又得

$$\dot{e}_i(t)=\sum_{j=1}^{i}(\dot{b}_{ij}(t)\sum_{k=1}^{j}a_{jk}(t)e_k(t)+b_{ij}(t)\times\sum_{k=1}^{j+1}a_{j+1,k}(t)e_k(t)). \tag{13}$$

和(9)式比较，就可看出(11)成立。□

在(14，15)下，矩阵 $[\omega_{ij}]$ 有表达式

$$
[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & & & \text{\Large 0} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & & \\ & -\omega_{23} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \omega_{n-1,n} \\ \text{\Large 0} & & & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}
$$

2.4 定义 曲线C的第i曲率($i=1,\cdots,n-1$)定义为

$$
\kappa_i := \frac{\omega_{i,i+1}}{|\dot{x}|}. \quad \square \tag{15}
$$

将(15)代入(14),得

$$
[\omega_{ij}] = |\dot{x}| \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & & & & \text{\Large 0} \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & & \\ & -\kappa_2 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ & & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}
$$

采用弧长参量s, $|x'|=1$,这时特别地有

$$
e_1' = \kappa_1 e_2, \qquad e_n' = -\kappa_{n-1} e_{n-1}. \tag{17}
$$

按定理1.8, $e_1'(s)$是曲线切向量$x'(s)$和$x'(s+\Delta s)$之间夹角与Δs之比在$\Delta s \to 0$时的变化情况,它度量曲线上邻近两点的切向量夹角对弧长的变化率,反映了曲线的"弯曲程度".因此,κ_1就是通常意义下的**曲率**. 而$|\kappa_{n-1}|$则度量曲线上邻近两点的第$n-1$法向量的夹角(即密切平面的夹角)对弧长的变化率,因此κ_{n-1}称为**挠率**.

2.5 命题 在定义2.4的前$n-2$个曲率函数是正的.

证明 只要按定义,利用(13),并考虑到Frenet标架的标准正交性和$(8)_1$, $(12)_2$,就得

$$
|\dot{x}|\kappa_i = \omega_{i,i+1} = \dot{e}_i e_{i+1} = b_{ii}(t) a_{i+1,i+1}(t) > 0.
$$

上式对$i \leqslant n-2$成立,因$(8)_1$中的$a_{ij}(t)$对$j \leqslant n-1$有定义. $\square$

对于E^3情形,取弧长s作参量, Frenet标架的惯用符号为

$\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$，并有 Frenet 公式：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= x', \\ \boldsymbol{n} &= \frac{1}{\kappa} x'', \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

分别称为**切向量**，**主法向量**和**从法向量**，而 κ 和 τ 就是**曲率**和**挠率**。

§3 曲面及其上的张量代数

3.1 定义 E 的 **$\boldsymbol{n}-1$ 维超曲面**$\mathscr{S}$是局部地可由一个方程

$$x \in \mathscr{N} \subset \mathscr{S} \Longleftrightarrow f(x) = 0 \tag{1}$$

表征的 E 的一个集合，其中 f 是梯度不为零的光滑标量值函数，其定义域包含 $\mathscr{N}$。

3.2 推论 $\mathscr{S}$ 上的单位向量场

$$\boldsymbol{n} := \operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f| \tag{2}$$

在每点与 $\mathscr{S}$ 正交，称为 $\mathscr{S}$ 的**单位法向量场**。

证明 在 $\mathscr{S}$ 上任意取光滑曲线 $C: I \to \mathscr{S}$，则由 (1) 的方程和链式法则，有

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t)) = (f\nabla)\dot{x}(t) = |\operatorname{grad} f| \boldsymbol{n}\dot{x}(t). \quad \square \tag{3}$$

曲面 $\mathscr{S}$ 的局部表示(1)并不唯一。若 f 满足(1)，则 $-f$ 亦满足 (1)，并且诱导出单位法向量场 $-\boldsymbol{n}$。

3.3 定义 若曲面 $\mathscr{S}$ 可以整体地用(1)表示，即存在一个光滑函数，其定义域包含整个超曲面：

$$x \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow f(x) = 0, \tag{4}$$

则 $\mathscr{S}$ 有唯一的光滑整体单位法向量场 $\boldsymbol{n}$（当然，$-\boldsymbol{n}$ 也是）. 这时 $\mathscr{S}$ 称为**可定向的**. $\mathscr{S}$ 称为**定向曲面**，如果选定其中一个法向量场作为**正单位法向量场**（f 也就应选相应的符号）. □

Möbius 带是不可定向曲面的经典例子. 今后只讨论定向曲面. 以后出现的希腊指标均涉及曲面上的量，从 1 至 $n-1$ 取值，遵循求和约定.

设 $\{x^i\}$ 是 $\mathbf{E}$ 的一个曲线坐标系，其基为 $\{\boldsymbol{g}_i\}$. 在 f 的定义域内不为零的 $\operatorname{grad} f = f_{,i}\boldsymbol{g}^i$ 至少有一个分量 $f_{,j} \neq 0$. 因此，可以在 f 的定义域选择 $n-1$ 个光滑函数 $\{\xi^\alpha\}$，满足

$$\operatorname{rank}\frac{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^n)} = n-1, \tag{5}$$

使得 $\{\xi^\alpha, \xi^n(=f)\}$ 在 f 的定义域构成一个新的曲线坐标系. 这时 $\mathscr{S}$ 就是 $\xi^n = 0$ 的坐标面. $\{\xi^\alpha\}_{f(x)=0}$ 构成 $\mathscr{S}$ 上的曲线坐标系. 为简便计，今后省去 $f(x)=0$ 或 $\xi^n=0$ 的标志. 各 ξ^α-坐标曲线的速度向量 $\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{x}_{,\alpha}$ 构成 $\mathscr{S}$ 上的基 $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$. 单位法向量场

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} = \frac{f_{,i}}{\sqrt{g^{kl}f_{,k}f_{,l}}}\boldsymbol{g}^i \tag{6}$$

在 $\mathscr{S}$ 的每点和基 $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ 正交. 可以取 $\{\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{n}\}$ 作为 $\mathbf{E}$ 的坐标系 $\{\xi^\alpha, \xi^n\}$ 在 $\mathscr{S}$ 上各点的非完整**正**标架（总可调整 $\{\xi^\alpha\}$ 的编号取得正定向）. 它的对偶基 $\{\boldsymbol{a}^\alpha, \boldsymbol{n}\}$ 满足

$$\boldsymbol{a}^\alpha\boldsymbol{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad \boldsymbol{a}^\alpha\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{a}_\alpha\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = 1. \tag{7}$$

$\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ 也认为是 $\mathscr{S}$ 上的**正基**. 由于 $(7)_1$，$\{\boldsymbol{a}^\alpha\}$ 是 $\mathscr{S}$ 上的逆变基. $\mathbf{E}$ 的内积诱导出 $\mathscr{S}$ 的内积. 在坐标系 $\{\xi^\alpha\}$ 下，$\mathscr{S}$ 的度量张量

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} = a_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^\alpha \otimes \boldsymbol{a}^\beta \tag{8}$$

的协变分量

$$a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_\alpha\boldsymbol{a}_\beta. \tag{9}$$

矩阵 $[a_{\alpha\beta}]$ 是 $\mathbf{E}$ 的坐标系 $\{\xi^\alpha, \xi^n\}$ 的非完整标架 $\{\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{n}\}$ 度量张量协变分量矩阵

$$\begin{bmatrix} [a_{\alpha\beta}] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

的左上方 $(n-1)\times(n-1)$ 子阵. 由关系式

$$a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}$$

可求得度量张量的逆变分量.

3.4 定义 光滑映射 $\boldsymbol{u}:\mathscr{S}\to\mathscr{V}:x\longmapsto\boldsymbol{u}(x)\in T_x\mathrm{E}$ 称为$\mathscr{S}$上的向量场，可表示为

$$\boldsymbol{u}=u^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}+u^{n}\boldsymbol{n}=u_{\alpha}\boldsymbol{a}^{\alpha}+u_{n}\boldsymbol{n},\tag{11}$$

其中

$$u^{\alpha}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{a}^{\alpha},\quad u_{\alpha}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{a}_{\alpha},\quad u^{n}=u_{n}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}.\tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathscr{S}}=u^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}=u_{\alpha}\boldsymbol{a}^{\alpha}=\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\tag{13}$$

称为 $\boldsymbol{u}$ 的**切向投影**，而

$$\boldsymbol{u}_{n}=u^{n}\boldsymbol{n}=u_{n}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{\mathscr{S}}\tag{14}$$

为法向投影. 若 $\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{o}$，即 $\forall x\in\mathscr{S}$，$\boldsymbol{u}(x)\in\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_{\alpha}(x)\}$，则 $\boldsymbol{u}$ 称为**曲面向量场**. 若 $\boldsymbol{u}_{\mathscr{S}}=\boldsymbol{o}$，则称为**法向量场**. □

在任何点 $x\in\mathscr{S}$，$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_{\alpha}(x)\}$ 是 $n-1$ 维子空间 $T_x\mathscr{S}\subset T_x\mathrm{E}$. 类似地，在$\mathscr{S}$上可以定义张量场和**曲面张量场**. 例如有$\binom{r}{s}$型**空间张量场** $\boldsymbol{\Phi}$，其切向投影就是舍去它在 E 的基 $\{\boldsymbol{a}_{\alpha},\boldsymbol{n}\}$ 上的表示式中的一切包含基向量 $\boldsymbol{n}$ 的项，从而有曲面张量场

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathscr{S}}=\Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s}\boldsymbol{a}_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}_{\alpha_r}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{a}^{\beta_s}.\tag{15}$$

在每个切空间 $T_x\mathscr{S}$ 自身的范围内，可以应用第 I—IV 章的全部论述于曲面张量. 曲面张量场的代数运算归结为逐点在切空间的代数运算.

§4 曲面的绝对微分学

欧氏空间 E 张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的绝对微分在第 V 章 §12 的理解下是按

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u})=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\Phi}(x)]\tag{1}$$

定义的. 作为推论有

$$D\boldsymbol{\Phi}(x;\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度在坐标系 $\{x^i\}$ 里有表达式

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\nabla} = \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\otimes\boldsymbol{g}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}\otimes\boldsymbol{g}^k. \tag{3}$$

不能将定义(1)直接推广于曲面 $\mathscr{S}$。首先，在 $\mathscr{S}$ 点差函数没有定义。对于 $x\in\mathscr{S}$, $\boldsymbol{u}\in T_x\mathscr{S}$, $x+s\boldsymbol{u}$ 是没有意义的。其次，即使按 $x\in\mathrm{E}$, $\boldsymbol{u}\in T_x\mathrm{E}$，恰好 $x+s\boldsymbol{u}\in\mathscr{S}$，将 $\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u})$ 作为E的自由张量平移至点 x 后一般已不再是 $T_x\mathscr{S}$ 上的张量。那么，$\boldsymbol{\Phi}(x+s\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\Phi}(x)$ 就不是曲面上的代数运算，结果也不是曲面张量。为了越过这些困难，我们先定义曲面张量的梯度，则按(2)求绝对微分就不成问题了。曲面张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**曲面梯度**，记作 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\tilde{\boldsymbol{\nabla}}$，必须仍然是曲面张量场(高一阶)。这里需要将第V章§12的简捷做法作一些修正。下面以二阶张量梯度为例说明。

4.1 定义　曲面 Hamilton 算子定义为

$$(\,)\otimes\tilde{\boldsymbol{\nabla}} := (\,)_{;\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^\alpha, \tag{4}$$

其中 $(\,)_{;\alpha}\equiv\dfrac{\delta}{\delta\xi^\alpha}$ 称为**曲面偏导数**，它

(i) 满足 Leibniz 法则；

(ii) $(\,)_{;\alpha} := ((\,)_{,\alpha})_{\mathscr{S}}$。□ (5)

可以看出，曲面偏导数是空间偏导数(即通常的偏导数)和切向投影的复合。特别地，对光滑函数 f 有 $f_{;\alpha}=(f_{,\alpha})_{\mathscr{S}}=f_{,\alpha}$。下面计算起关键作用的基向量的曲面偏导数

$$\boldsymbol{a}_{\alpha;\beta} = (\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta})_{\mathscr{S}} = (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\gamma + \text{含 } \boldsymbol{n} \text{ 的项})_{\mathscr{S}} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\gamma. \tag{6}$$

$$\boldsymbol{a}^\alpha_{;\beta} = (\boldsymbol{a}^\alpha_{,\beta})_{\mathscr{S}} = (-\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\boldsymbol{a}^\gamma + \text{含 } \boldsymbol{n} \text{ 的项})_{\mathscr{S}} = -\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\boldsymbol{a}^\gamma. \tag{7}$$

这里 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 是E的坐标系 $\{\xi^\alpha,\xi^n\}$ 的第二类 Christoffel 符号 Γ^k_{ij} 在指标取1至 $n-1$ 值的那些元素，称为**曲面第二类 Christoffel 符号**。同样也有**曲面第一类 Christoffel 符号** $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$，满足

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = a_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\beta}. \tag{8}$$

显然

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(a_{\beta\gamma,\alpha} + a_{\gamma\alpha,\beta} - a_{\alpha\beta,\gamma}). \tag{9}$$

于是，曲面张量场 $\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{\alpha}{}_{\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}$ 的右曲面梯度就是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}\otimes\tilde{\boldsymbol{\nabla}}=\boldsymbol{\Phi}_{;\gamma}\otimes\boldsymbol{a}^{\gamma}&=(\Phi^{\alpha}{}_{\beta;\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}\\&\quad+\Phi^{\alpha}{}_{\beta}(\boldsymbol{a}_{\alpha;\gamma}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}+\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}_{;\gamma}))\otimes\boldsymbol{a}^{\gamma}\\&=(\Phi^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\Phi^{\rho}{}_{\beta}-\Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}\Phi^{\alpha}{}_{\rho})\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}\otimes\boldsymbol{a}^{\gamma}\\&=\Phi^{\alpha}{}_{\beta;\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}\otimes\boldsymbol{a}^{\gamma},\end{aligned}\tag{10}$$

其中分量

$$\Phi^{\alpha}{}_{\beta;\gamma}\equiv\Phi^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\Phi^{\rho}{}_{\beta}-\Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}\Phi^{\alpha}{}_{\rho}\tag{11}$$

称为**曲面协变导数**.

类似地，有任意阶曲面张量场的曲面梯度公式，其协变导数包含的项相应地增加.

正如第V章所说，联络系数表现空间的一种平行性．在 **E** 中我们有**欧几里德平行性，即自然平行性**．在曲面上曲面偏导数的引进，或者等价地说，由度量张量通过公式(8，9)引进的 Christoffel 符号表现了曲面的某种平行性，称为 **Levi-Cività 平行性**．这种平行性的平行移动，不同于自然平行性，与路径有关.

§5 Weingarten-Gauss 公式

前一节定义了任何曲面张量场的**曲面梯度**和**曲面协变导数**．曲面张量场也可以看作 **E** 上的空间张量场，从而可以计算它的**空间梯度**和**空间协变导数**．就是说，可以从两个角度探讨曲面张量场沿 $\mathscr{S}$ 的任何曲线 $C:t\longmapsto\xi(t)\in\mathscr{S}$ 的变化率：$\dfrac{d}{dt}$ 表示空间变化率，而 $\dfrac{\delta}{\delta t}$ 表示曲面变化率．显然，空间张量场的曲面变化率是没有定义的．如果曲线 C 是坐标曲线 $\xi^{\alpha}\longmapsto\xi(\xi^{\alpha})$，则分别用 $\dfrac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}}\equiv(\,)_{,\alpha}$ 和 $\dfrac{\delta}{\delta\xi^{\alpha}}\equiv(\,)_{;\alpha}$ 表示两种变化率.

在 $\mathscr{S}$ 上定义的标架 $\{\boldsymbol{a}_{\alpha},\boldsymbol{n}\}$ 在空间随点 $\xi\in\mathscr{S}$ 而变化(好像观察者站在 **E** 观察)，变化的程度是曲面局部性质的体现．$\boldsymbol{n}$ 的变化反映了 $\mathscr{S}$ 的局部弯曲程度，而 $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 的变化则反映 $\mathscr{S}$ 的局部弯

曲和扭的程度.

先讨论空间向量场——$\mathscr{S}$ 的单位法向量场 $\boldsymbol{n}$. 对 $\boldsymbol{nn}=1$ 求沿曲线 C 的空间变化率，得 $0=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{nn})$，并从而有

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}\boldsymbol{n}=0. \tag{1}$$

这说明，$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}$ 切于 $\mathscr{S}$，是一个曲面向量. 对于过同一点 $\xi(t)$ 的另一条曲线，所得的变化率 $\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}$ 一般是不同的. 就是说，在每点 $\xi(t)$，我们有映射：

$$-\boldsymbol{B}: T_{\xi(t)}\mathscr{S}\to T_{\xi(t)}\mathscr{S}: \dot{\xi}\longmapsto\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}. \tag{2}$$

前面的负号只是为了和传统习惯一致. 下面证明，映射(2)是线性的，而且由一个对称曲面仿射量实现. 事实上，由于 $\boldsymbol{n}=\operatorname{grad}f/|\operatorname{grad}f|$，总可以找到一个标量值函数 $w(x)$，使得

$$\boldsymbol{n}=\operatorname{grad}w|_{\mathscr{S}}. \tag{3}$$

计算 $\boldsymbol{n}$ 沿 C 的空间变化率

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}=D\boldsymbol{n}(\xi;\dot{\xi})=D\operatorname{grad}w(\xi;\dot{\xi})=(w\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\xi)\dot{\xi}. \tag{4}$$

考虑到在 $\mathbf{E}$ 中求梯度与次序无关，空间仿射量 $(w\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla})(\xi)$: $T_\xi\mathbf{E}\to T_\xi\mathbf{E}$ 是对称的. 从(4)式看到，它在 $T_\xi\mathscr{S}$ 上的限制的值域也包含在 $T_\xi\mathscr{S}$，因此，$w\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}|_{\mathscr{S}}$ 是对称曲面仿射量场. 从而有

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}=-\boldsymbol{B}\dot{\xi}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}=b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^\alpha\otimes\boldsymbol{a}^\beta=-w\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}|_{\mathscr{S}}. \tag{6}$$

如果取 ξ^α- 坐标线，则

$$\boldsymbol{n}_{,\alpha}=-\boldsymbol{B}\xi_{,\alpha} \tag{7}$$

即

$$\boldsymbol{n}_{,\alpha}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}_\alpha=-b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^\beta=-b_\alpha^\beta\boldsymbol{a}_\beta. \tag{8}$$

由此又得 $\boldsymbol{B}$ 的分量公式

$$b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{n}_{,\alpha}\boldsymbol{a}_{\beta}. \tag{9}$$

考虑到 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_{\beta} = 0$ 及 $\boldsymbol{n}_{,\alpha}\boldsymbol{a}_{\beta} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_{\beta,\alpha} = 0$，由 (9) 又有

$$b_{\alpha\beta} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_{\beta,\alpha} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\xi}_{,\alpha\beta}. \tag{10}$$

这从另一个角度又证实了 $\boldsymbol{B}$ 的对称性. (8)式称为曲面的 **Weingarten 公式**. 曲面仿射量 $\boldsymbol{B}$ 刻划曲面在每一点的一种几何性质——单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 在任何方向的空间变化率. 因此，$\boldsymbol{B}$ 是一种曲率的度量. 有些作者称为"**曲率张量**"，但更普遍的称呼是曲面的**第二基本形式**. 而代表度量性质的曲面仿射量 $\boldsymbol{A}$ 则称为曲面的**第一基本形式**.

现看曲面向量场 $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{a}^{\alpha}$. 求 $\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{n} = 0$ 和 $\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{n} = 0$ 沿曲线 C 的空间变化率，得

$$0 = \frac{d(\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{n})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}_{\alpha}}{dt}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_{\alpha}\frac{d\boldsymbol{n}}{dt},$$

$$0 = \frac{d(\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{n})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}^{\alpha}}{dt}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}^{\alpha}\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}.$$

对于 ξ^{β}-坐标曲线，考虑到 (8)，上两式给出

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} &= -\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{n}_{,\beta} = b_{\alpha\beta}, \\ \boldsymbol{n}\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} &= -\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{n}_{,\beta} = b^{\alpha}_{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

另一方面，从 (4.6, 7) 两式有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}^{\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} &= \boldsymbol{a}^{\gamma}(\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{\rho} + \text{含 } \boldsymbol{n} \text{ 的项}) = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}, \\ \boldsymbol{a}_{\gamma}\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} &= \boldsymbol{a}_{\gamma}(-\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta}\boldsymbol{a}^{\rho} + \text{含 } \boldsymbol{n} \text{ 的项}) = -\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(11)和(12)式合起来给出 $\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}$ 和 $\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta}$ 的分解式：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} &= b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{\gamma}, \\ \boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} &= b^{\alpha}_{\beta}\boldsymbol{n} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\boldsymbol{a}^{\gamma}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

称为 **Gauss 公式**. (8) 和 (13) 是曲面曲率空间描述的基本公式.

§6 Riemann-Christoffel 张量和 Ricci 恒等式

本节从曲面的内在性质看(好像观察者站在曲面上观察)曲面

的弯曲. 从第V章知道,完全由坐标系度量张量所确定的 Christoffel 符号反映了空间 E 的自然平行性. 任何向量用限制点差函数映射到自由向量空间,再反映射回任何其他点而得到一个和原向量平行的向量. 在 E,所有切空间自然同构,任何一点的切空间可以通过上述的平行移动而得到另一点的切空间. 曲面已经不具有这种性质. 但仍可用度量张量定义 Christoffel 符号(见(4.9)),从而定义了协变导数. 定义协变导数等价于定义平行移动. 这样在曲面就引进了 Levi-Cività 平行性. 不同于自然平行性,这种平行性所导出的平行移动和路径有关. 因此, 可以说, $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 表达了该曲面的 Levi-Cività 平行性离开自然平行性的距离.

为了显示这种差距,我们在具有笛氏坐标系 $\{x^i\}$ 的 E 中考虑光滑向量场 $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i$. 我们有

$$\boldsymbol{u}\otimes\nabla=u^i_{;j}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j,$$

$$(\boldsymbol{u}\otimes\nabla)\otimes\nabla=u^i_{;jk}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k.$$

偏导数的次序无关性使得求梯度也是与次序无关的. 这里的关键是: 在 E 存在直角坐标系,对于它 $\Gamma^k_{ij}=0$.

但在曲面上,一般不存在使 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=0$ 的坐标系. 这时,在坐标系 $\{\xi^\alpha\}$ 下,任意曲面向量场 $\boldsymbol{u}=u^\alpha\boldsymbol{a}_\alpha$ 曲面梯度的分量,即协变导数,及二阶协变导数求得如下:

$$\begin{aligned}
u^\alpha_{;\beta}&=u^\alpha_{,\beta}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\gamma,\\
u^\alpha_{;\beta\gamma}&=(u^\alpha_{,\beta}+\Gamma^\alpha_{\beta\varphi}u^\varphi)_{,\gamma}+\Gamma^\alpha_{\gamma\varphi}(u^\varphi_{,\beta}\\
&\qquad+\Gamma^\varphi_{\beta\theta}u^\theta)-\Gamma^\varphi_{\gamma\beta}(u^\alpha_{,\varphi}+\Gamma^\alpha_{\varphi\theta}u^\theta)\\
&=u^\alpha_{,\beta\gamma}+\Gamma^\alpha_{\varphi\gamma}u^\varphi_{,\beta}+\Gamma^\alpha_{\varphi\beta}u^\varphi_{,\gamma}-\Gamma^\varphi_{\beta\gamma}u^\alpha_{,\varphi}\\
&\qquad+u^\varphi(\Gamma^\theta_{\varphi\beta}\Gamma^\alpha_{\theta\gamma}-\Gamma^\alpha_{\varphi\theta}\Gamma^\theta_{\beta\gamma}+\Gamma^\alpha_{\varphi\beta,\gamma}).
\end{aligned}$$

由此得

$$u^\alpha_{;\beta\gamma}-u^\alpha_{;\gamma\beta}=-u^\varphi R^\alpha{}_{\varphi\beta\gamma},\tag{1}$$

其中

$$R^\alpha{}_{\varphi\beta\gamma}\equiv\Gamma^\alpha_{\varphi\gamma,\beta}-\Gamma^\alpha_{\varphi\beta,\gamma}+\Gamma^\theta_{\varphi\gamma}\Gamma^\alpha_{\theta\beta}-\Gamma^\theta_{\varphi\beta}\Gamma^\alpha_{\theta\gamma}.\tag{2}$$

可以验证,当 $\mathscr{S}$ 上的坐标系 $\{\xi^\alpha\}$ 转换至 $\{\xi^{\alpha'}\}$ 时,这组含四个指标的量满足四阶张量分量的转换法则. 因此,有曲面张量场

$$\mathbf{R} = R^{\alpha}{}_{\varphi\beta\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\varphi}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta}\otimes\boldsymbol{a}^{\gamma}. \tag{3}$$

它只依赖于 Christoffel 符号 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$，而 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 又可由度量张量分量 $a_{\alpha\beta}$ 表达. 而另一方面 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 表达了曲面的平行性，因此，张量 $\mathbf{R}$ 表达了曲面 Levi-Cività 平行性局部地离开自然平行性的程度. 从 (1) 看出，如果 $\mathbf{R}=\mathbf{O}$，则梯度次序可以交换. 这时，Levi-Cività 平行性是局部欧氏的. $\mathbf{R}$ 称为**Riemann-Christoffel 张量**. 通过计算，不难将(1)式推广至任意阶曲面张量 Φ：

$$\begin{aligned}
&\Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s;\alpha\beta} - \Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s;\beta\alpha}\\
&\quad= -\Phi^{\varphi\alpha_2\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_s}R^{\alpha_r}{}_{\varphi\alpha\beta} - \cdots - \Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_{r-1}\varphi}{}_{\beta_1\cdots\beta_s}R^{\alpha_r}{}_{\varphi\alpha\beta}\\
&\qquad+ \Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\psi\beta_2\cdots\beta_s}R^{\psi}{}_{\beta_1\alpha\beta} + \cdots + \Phi^{\alpha_1\cdots\alpha_r}{}_{\beta_1\cdots\beta_{s-1}\psi}R^{\psi}{}_{\beta_s\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4}$$

这称为 **Ricci 恒等式**.

§7 Gauss-Codazzi 方程

在本节里我们将分别从空间和从曲面描述曲面弯曲的两个量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\mathbf{R}$ 联系起来. 为此，考虑曲面向量场 $\boldsymbol{u}=u^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}$，它沿曲线 $C: t\longmapsto \xi(t)\in\mathscr{S}$ 的空间变化率是

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= \dot{u}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha} + u^{\alpha}\frac{d\boldsymbol{a}_{\alpha}}{dt} = \dot{u}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha} + u^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}\dot{\xi}^{\beta}\\
&= \dot{u}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha} + u^{\alpha}(b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{\gamma})\dot{\xi}^{\beta}\\
&= b_{\alpha\beta}u^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}\boldsymbol{n} + (u^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}u^{\gamma})\dot{\xi}^{\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha}\\
&= b_{\alpha\beta}u^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}\boldsymbol{n} + u^{\alpha}_{;\beta}\dot{\xi}^{\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha}.
\end{aligned} \tag{1}$$

考虑到

$$\frac{\delta\boldsymbol{u}}{\delta t} = (\boldsymbol{u}\otimes\tilde{\boldsymbol{\nabla}})\dot{\xi} = (u^{\alpha}_{;\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{a}^{\beta})\dot{\xi} = u^{\alpha}_{;\beta}\dot{\xi}^{\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha},$$

(1) 式又可写成

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = b_{\alpha\beta}u^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}\boldsymbol{n} + \frac{\delta\boldsymbol{u}}{\delta t}. \tag{2}$$

若取 ξ^{α}-坐标曲线，则有

$$\boldsymbol{u}_{,\alpha} = b_{\alpha\beta}u^\beta \boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_{;\alpha}. \tag{3}$$

这说明，曲面向量场 $\boldsymbol{u}$ 沿 ξ^α-曲线的空间变化率是空间向量场，分解为法向量场和切向量场。再对这向量场求空间偏导数，并在(3)以 $\boldsymbol{u}_{;\alpha}$ 代替 $\boldsymbol{u}$，考虑到 $\boldsymbol{u}_{;\alpha} = (u^\beta \boldsymbol{a}_\beta)_{;\alpha} = u^\beta_{;\alpha}\boldsymbol{a}_\beta$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{,\alpha\beta} &= (b_{\alpha\gamma}u^\gamma \boldsymbol{n})_{,\beta} + (\boldsymbol{u}_{;\alpha})_{,\beta}\\ &= (b_{\alpha\gamma}u^\gamma \boldsymbol{n})_{,\beta} + b_{\beta\gamma}u^\gamma_{;\alpha}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_{;\alpha\beta}.\end{aligned}$$

由空间偏导数次序之可交换性，将上式代入 $\boldsymbol{u}_{,\beta\alpha} = \boldsymbol{u}_{,\alpha\beta}$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{;\beta\alpha} - \boldsymbol{u}_{;\alpha\beta} &= (b_{\alpha\gamma}u^\gamma \boldsymbol{n})_{,\beta} - (b_{\beta\gamma}u^\gamma \boldsymbol{n})_{,\alpha}\\ &\quad + (b_{\beta\gamma}u^\gamma_{;\alpha} - b_{\alpha\gamma}u^\gamma_{;\beta})\boldsymbol{n}.\end{aligned} \tag{4}$$

上式左端是切向量场(用到 (6.1))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{;\beta\alpha} - \boldsymbol{u}_{;\alpha\beta} &= (u^\gamma_{;\beta}\boldsymbol{a}_\gamma)_{;\alpha} - (u^\gamma_{;\alpha}\boldsymbol{a}_\gamma)_{;\beta}\\ &= [(u^\gamma_{;\beta})_{,\alpha} + u^\rho_{;\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\alpha} - (u^\gamma_{;\alpha})_{,\beta} - u^\rho_{;\alpha}\Gamma^\gamma_{\rho\beta}]\boldsymbol{a}_\gamma\\ &= [(u^\gamma_{;\beta})_{,\alpha} + \Gamma^\gamma_{\alpha\rho}u^\rho_{;\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}u^\gamma{}_{;\rho}\\ &\quad - (u^\gamma_{;\alpha})_{,\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\rho}u^\rho_{;\alpha} + \Gamma^\rho_{\beta\alpha}u^\gamma_{;\rho}]\boldsymbol{a}_\gamma\\ &= (u^\gamma_{;\beta\alpha} - u^\gamma_{;\alpha\beta})\boldsymbol{a}_\gamma = -u^\varphi R^\gamma{}_{\varphi\beta\alpha}\boldsymbol{a}_\gamma,\end{aligned}$$

它应等于 (4) 式右端的切向投影

$$\begin{aligned}(b_{\alpha\rho}u^\rho)\boldsymbol{n}_{,\beta} - (b_{\beta\rho}u^\rho)\boldsymbol{n}_{,\alpha} &= (-b_{\alpha\rho}u^\rho b^\gamma_\beta + b_{\beta\rho}u^\rho b^\gamma_\alpha)\boldsymbol{a}_\gamma\\ &= (b^\gamma_\alpha b_{\beta\rho} - b^\gamma_\beta b_{\alpha\rho})u^\rho \boldsymbol{a}_\gamma.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{u}$ 的任意性，得

$$R^\gamma{}_{\varphi\alpha\beta} = b^\gamma_\alpha b_{\beta\varphi} - b^\gamma_\beta b_{\alpha\varphi} \tag{5}$$

或

$$R_{\gamma\varphi\alpha\beta} = b_{\gamma\alpha}b_{\beta\varphi} - b_{\gamma\beta}b_{\alpha\varphi}. \tag{6}$$

(6)式称为 **Gauss 方程**. 可见，$\mathbf{R}$ 完全由 $\boldsymbol{B}$ 确定，但 $\mathbf{R}$ 并不完全确定 $\boldsymbol{B}$. 就是说，曲面曲率的空间表征比内禀表征要强. 特别地，如果 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$，则法方向处处相同，$\mathscr{S}$ 是超平面. 这时也有 $\mathbf{R} = \mathbf{O}$. 但反过来，若 $\mathbf{R} = \mathbf{O}$，$\mathscr{S}$ 可能还不一定是超平面，因这时 $\boldsymbol{B}$ 不一定为零. 例如，$\mathbf{E}^3$ 中的圆柱面是可展曲面，$\mathbf{R} = \mathbf{O}$，但 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$.

余下(4)式右端的法向投影应为零，于是有

$$0 = (b_{\alpha\gamma}u^\gamma)_{,\beta} - (b_{\beta\gamma}u^\gamma)_{,\alpha} + b_{\beta\gamma}u^\gamma_{;\alpha} - b_{\alpha\gamma}u^\gamma_{;\beta}$$

$$= (b_{\alpha\gamma,\beta} - b_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} - b_{\beta\gamma,\alpha} + b_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma})u^{\gamma},$$

由此得 **Codazzi 方程**

$$b_{\gamma\alpha;\beta} = b_{\gamma\beta;\alpha}. \tag{7}$$

它加于 $\boldsymbol{B}$ 一种限制.

Gauss-Codazzi 方程的重要性不仅在于给出第二基本形式所受的限制以及它和 Riemann-Christoffel 张量的关系，而且还在于它们是下述定理的可积条件.

7.1 定理 设 $(\xi^{\alpha}) \in \mathbf{R}^{n-1}$, $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$ 是开域. 在 D 给定光滑函数矩阵 $[a_{\alpha\beta}]$ 和 $[b_{\alpha\beta}]$，分别为正定对称和对称，满足 Gauss 和 Codazzi 方程，则局部地存在超曲面

$$\mathscr{S}: D \subset \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{E}^{n}: (\xi^{\alpha}) \longmapsto x(\xi^{\alpha}),$$

它的第一、二基本形式就是 $[a_{\alpha\beta}]$ 和 $[b_{\alpha\beta}]$. □

证明略.

第 IX 章　张量分析的若干近代概念

本章阐述近代张量分析的若干重要概念.

§ 1　切空间，余切空间和微分形式

在第 II 章 § 3，张量是作为向量自变量的多重线性函数而定义的. 在引进张量概念之前，我们通过内积把向量(一阶张量)看作为从向量空间 $\mathscr{V}$ 到 R 的线性映射. 然后推广为多重线性映射. 如果不用内积实现，从 $\mathscr{V}$ 到 R 的线性映射[1]:

$$\boldsymbol{\omega}:\mathscr{V}\to\mathrm{R};\boldsymbol{u}\longmapsto\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

就不再是 $\mathscr{V}$ 的元素，而是所谓**余向量** (covector). 余向量的全体记作 $\mathscr{V}^*$. 显然有

1.1 定理　如果引进余向量的加法和数乘如下:

$$(\alpha\boldsymbol{\varphi}+\beta\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{u})=\alpha\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})+\beta\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}),$$
$$\forall\,\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi}\in\mathscr{V}^*;\alpha,\beta\in\mathrm{R};\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}, \tag{2}$$

则它们满足向量空间运算的八个条件，因而 $\mathscr{V}^*$ 是一个向量空间，称为向量空间 $\mathscr{V}$ 的**对偶空间** (dual space). □

容易证明，$\dim\mathscr{V}^*=n$，且 $\mathscr{V}^*$ 有唯一的一组基 $\{\boldsymbol{\gamma}^i\}$，满足

$$\boldsymbol{\gamma}^i(\boldsymbol{g}_j)=\delta^i_j, \tag{3}$$

仍称为 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的**对偶基**. 和第 II 章一样，可以定义自变量为向量的

---

1) 在内积空间里，内积是映射

$$\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathrm{R};(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\mapsto\boldsymbol{v}\boldsymbol{u},$$

而现在我们有映射

$$\mathscr{V}^*\times\mathscr{V}\longrightarrow\mathrm{R};(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\mapsto\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u}\rangle\equiv\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u}).$$

这个映射常称为**配对** (pairing).

r 阶协变张量[1]

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{\gamma}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{i_r}, \tag{4}$$

其分量为

$$\Phi_{i_1\cdots i_r} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{i_r}); \tag{5}$$

也可以定义自变量为余向量的 s 阶**逆变张量**

$$\boldsymbol{\Psi} = \Psi^{i_1\cdots i_s}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_s}, \tag{6}$$

其分量为

$$\Psi^{i_1\cdots i_s} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\gamma}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}^{i_s}). \tag{7}$$

应注意的是，这里用到了

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{\gamma}^j) = \boldsymbol{\gamma}^j(\boldsymbol{g}_i), \tag{8}$$

由它，我们就得到，$\mathscr{V}^*$ 的对偶空间 $(\mathscr{V}^*)^*$ 和 $\mathscr{V}$ 自然同构，并且可以把它们等同起来（在比较完整的线性代数书籍可找到详尽的论述）。把张量积运算扩大至 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{V}^*$ 的元素之间，我们又有**混合型张量**，例如 $\binom{r}{s}$ 型张量

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_s}, \tag{9}$$

和 $\binom{s}{r}$ 型张量

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega^{i_1\cdots i_s}{}_{j_1\cdots j_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_s}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_r}, \tag{10}$$

它们的分量分别是

$$\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\gamma}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}^{i_r},\boldsymbol{g}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{j_s}), \tag{11}$$

$$\Omega^{i_1\cdots i_s}{}_{j_1\cdots j_r} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\gamma}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}^{i_s},\boldsymbol{g}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{j_r}). \tag{12}$$

由于引进余向量，“指标游戏”也随之而暂停。这时，对于混合型张量，阶数不说明问题，而需分别给出逆变和协变的阶数（有时还需给出两类自变量的次序）。如果 $r\neq s$，则 $\boldsymbol{\Theta}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 是两个不同型的张量。

E 的每一点 x 的切空间 T_xE 是一个向量空间。我们已经比较

1) 这里涉及到余向量（或进一步协变张量）的张量积的定义。例如，$\forall\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\phi}\in\mathscr{V}^*$，其张量积定义为

$$\boldsymbol{\varphi}\otimes\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}.$$

对更多的余向量或协变张量的推广类似于向量的张量积。

透彻地研究了切空间的各种代数性质（即由代数运算所表述的性质）．切空间的元素是点差函数，即位移向量．一旦认识了 $T_x\mathbf{E}$ 是一个向量空间，就可以讨论作用在点 x 的各种向量，例如由位移向量导出的速度，加速度，甚至力等等．它们都是向量，但在物理实质上又极不相同．我们不能将不同性质的向量相加，如速度与力之和是没有意义的．

以位移向量作为切空间的元素是古典的做法，比较直观（注：在不存在仿射坐标系的空间，这种做法行不通），但不是定义切空间的唯一途径．下面我们给出切空间的另一定义，或者说，定义一个和 $T_x\mathbf{E}$ 自然同构的向量空间．通过对这个向量空间的研究，我们进一步丰富 $T_x\mathbf{E}$ 的代数性质以及在 $\mathbf{E}$ 上运算的内容．为此，需作一些准备工作．

1.2 定义 已定义，$\mathscr{F}(\mathscr{U})$ 是 $\mathscr{U}\subset\mathbf{E}$ 上的光滑函数集合．今引入 $\mathscr{F}(x)$，它是定义域包含 $x\in\mathbf{E}$ 的光滑函数的集合．显然，$\forall f, g\in\mathscr{F}(x)$；$\alpha, \beta\in\mathbb{R}$，恒有 $\alpha f+\beta g\in\mathscr{F}(x)$ 和 $fg\in\mathscr{F}(x)$．因此，$\mathscr{F}(x)$ 是一个**代数**．

1.3 定义 绝对微分

$$
\begin{aligned}
Df(x;\boldsymbol{u}(x)) &= (f\boldsymbol{\nabla})(x)\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{\nabla}f)(x) \\
&= \boldsymbol{u}(x)\operatorname{grad} f(x)
\end{aligned} \tag{13}
$$

称为 $f\in\mathscr{F}(x)$ 在点 x 在 $\boldsymbol{u}(x)$ 方向的**方向导数**．标量函数 f 的梯度 $f\otimes\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\nabla}\otimes f$ 省去符号“$\otimes$”而记为 $f\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\nabla}f$．方向导数包含三个因素：点 x，函数 f 和向量 $\boldsymbol{u}(x)$．x 总认为是固定的．对于给定函数 f，绝对微分可以看作映射 $T_x\mathbf{E}\to\mathbf{R}$．反之．如果给定 $\boldsymbol{u}(x)$，又可看作映射 $\mathscr{F}(x)\to\mathbb{R}$．任何 $\mathscr{F}(x)$-函数均有在 $\boldsymbol{u}(x)$ 方向的方向导数．因此，对给定 $\boldsymbol{u}(x)$，(13) 式定义一个映射，或者说，$\boldsymbol{u}(x)$ 诱导出一个映射：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^D(x):\mathscr{F}(x) &\to \mathbf{R}: f\longmapsto \boldsymbol{u}^D(x)f \\
&= \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{\nabla}f(x)) = \boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{\nabla}|_x f.
\end{aligned} \tag{14}
$$

$\boldsymbol{\nabla}f(x)$ 是 f 的梯度在点 x 的值，而 $\boldsymbol{\nabla}|_x f$ 表示 f 在点 x 的梯度，两者当然是等价的．于是，映射(14)就可写成

$$\boldsymbol{u}^D(x) = \boldsymbol{u}(x)\nabla|_x. \tag{15}$$

$\boldsymbol{u}^D(x)$ 作用于 f 表示：在点 x 求 f 的梯度 $\nabla|_x f$（向量），再和向量 $\boldsymbol{u}(x)$ 点乘．$\boldsymbol{u}^D(x)$ 是一个一阶微分算子．□

这里定义的方向导数略异于多元函数的方向导数．在那里要求用单位向量，而定义 1.3 不用长度概念[1]．如果 $\boldsymbol{v}(x) = \alpha\boldsymbol{u}(x)$，则 $\boldsymbol{v}^D(x)f = \alpha(\boldsymbol{u}^D(x)f) = \alpha\boldsymbol{u}^D(x)f$．

设 $\{x^i\}$ 是曲线坐标系，则 $\boldsymbol{u}(x) = u^i(x)\boldsymbol{g}_i(x)$，由(14)可得

$$\boldsymbol{u}^D(x) = u^i(x)\partial_i|_x, \tag{16}$$

并且，若取坐标函数 x^i 为 f，则

$$\boldsymbol{u}^D(x)x^i = u^j(x)\partial_j|_x x^i = u^j(x)(\partial_j x^i)(x) = u^j(x)\delta^i_j = u^i(x). \tag{17}$$

1.4 定理 微分算子 $\boldsymbol{u}^D(x)$ 有性质（$\forall f, g \in \mathscr{F}(x)$；$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$）：

(i) 线性 $\boldsymbol{u}^D(x)(\alpha f + \beta g) = \alpha\boldsymbol{u}^D(x)f + \beta\boldsymbol{u}^D(x)g$， (18)

(ii) 导性（Leibnitz 法则）

$$\boldsymbol{u}^D(x)(fg) = (\boldsymbol{u}^D(x)f)g(x) + f(x)(\boldsymbol{u}^D(x)g). \tag{19}$$

证明 由梯度的线性和点乘的双线性，性质(i)是显然的．要证明性质(ii)，只需按定义(14)计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^D(x)(fg) &= \boldsymbol{u}(x)(\nabla(fg)(x)) = \boldsymbol{u}(x)((\nabla f(x))g(x) \\ &\quad + f(x)(\nabla g(x))) \\ &= (\boldsymbol{u}(x)(\nabla f(x)))g(x) + f(x)(\boldsymbol{u}(x)(\nabla g(x))).\end{aligned}$$

1.5 定义 记具有性质(i)和(ii)，从 $\mathscr{F}(x)$ 到 $\mathbf{R}$ 的全体映射为 $\mathscr{D}(x)$，它的元素称为 $\mathscr{F}(x)$ 到 $\mathbf{R}$ 的**导数**．定义加法和数乘如下：

$$(\xi\boldsymbol{D}_1 + \eta\boldsymbol{D}_2)f = \xi\boldsymbol{D}_1 f + \eta\boldsymbol{D}_2 f,$$

$$\forall \boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2 \in \mathscr{D}(x); f \in \mathscr{F}(x); \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \tag{20}$$

这定义归结为在(20)右端进行实数运算．$\boldsymbol{D}$ 定义为**零导数**，如果 $\boldsymbol{D}f = 0, \forall f \in \mathscr{F}(x)$．

1）因为我们已不用内积．我们处在仿射空间．

1.6 引理 $\mathscr{D}(x)$ 是一个向量空间.

证明 如果能证明 (20) 式的 $\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2\in\mathscr{D}(x)$，即满足性质 (i) 和 (ii)，则易证定义 1.5 的加法和数乘满足向量空间运算的 8 个条件. 因此，引理的证明归结为 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; $f,g\in\mathscr{F}(x)$ 验证 (i) 和 (ii)，其中用到 (20) 以及 $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ 满足 (18),(19).

(i)
$$
\begin{aligned}
(\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2)(\alpha f+\beta g)&=\xi\boldsymbol{D}_1(\alpha f+\beta g)+\eta\boldsymbol{D}_2(\alpha f+\beta g)\\
&=\xi(\alpha\boldsymbol{D}_1f+\beta\boldsymbol{D}_1g)+\eta(\alpha\boldsymbol{D}_2f+\beta\boldsymbol{D}_2g)\\
&=\alpha(\xi\boldsymbol{D}_1f+\eta\boldsymbol{D}_2f)+\beta(\xi\boldsymbol{D}_1g+\eta\boldsymbol{D}_2g)\\
&=\alpha(\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2)f+\beta(\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2)g,
\end{aligned}
$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
(\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2)(fg)&=\xi\boldsymbol{D}_1(fg)+\eta\boldsymbol{D}_2(fg)\\
&=\xi[(\boldsymbol{D}_1f)g(x)+f(x)(\boldsymbol{D}_1g)]\\
&\quad+\eta[(\boldsymbol{D}_2f)g(x)+f(x)(\boldsymbol{D}_2g)]\\
&=(\xi\boldsymbol{D}_1f+\eta\boldsymbol{D}_2f)g(x)+f(x)(\xi\boldsymbol{D}_1g+\eta\boldsymbol{D}_2g)\\
&=[(\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2)f]g(x)+f(x)[(\xi\boldsymbol{D}_1+\eta\boldsymbol{D}_2)g].
\end{aligned}
$$

1.7 引理 映射

$$
\boldsymbol{J}:T_x\mathbf{E}\to\mathscr{D}(x);\boldsymbol{u}(x)\longmapsto\boldsymbol{u}^D(x)=\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{\nabla}|_x \qquad (21)
$$

是单的和线性的.

证明 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}(x))=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}(x))$，即 $\boldsymbol{u}^D(x)=\boldsymbol{v}^D(x)$，表示

$$
\boldsymbol{u}^D(x)f=\boldsymbol{v}^D(x)f,\quad\forall f\in\mathscr{F}(x).
$$

利用(14)，得

$$
\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{\nabla}f(x))=\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{\nabla}f(x))
$$

即

$$
(\boldsymbol{u}(x)-\boldsymbol{v}(x))(\boldsymbol{\nabla}f(x))=0.
$$

由于 f，从而 $\boldsymbol{\nabla}f$，的任意性和点积的正定性，我们有 $\boldsymbol{u}(x)=\boldsymbol{v}(x)$，故 $\boldsymbol{J}$ 是单射.

利用点积的线性性质，$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; $\boldsymbol{u}(x)$, $\boldsymbol{v}(x)\in T_x\mathbf{E}$，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}(\alpha\boldsymbol{u}(x)+\beta\boldsymbol{v}(x))&=(\alpha\boldsymbol{u}(x)+\beta\boldsymbol{v}(x))\boldsymbol{\nabla}|_x\\
&=\alpha\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{\nabla}|_x+\beta\boldsymbol{v}(x)\boldsymbol{\nabla}|_x=\alpha\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}(x))+\beta\boldsymbol{J}(\boldsymbol{v}(x)).
\end{aligned}
$$

上式证明 $\boldsymbol{J}$ 是线性映射. □

如果 $\dim\mathscr{D}(x)=\dim T_x\mathbf{E}$，从上述引理就可得出 $\boldsymbol{J}$ 是同构映射. 但现在不知 $\dim\mathscr{D}(x)$，要得出同构的结论，还需证明 $\boldsymbol{J}$ 是

满射．为此，需要两个引理．

1.8 引理 $\forall \boldsymbol{D} \in \mathscr{D}(x)$，若 $f \in \mathscr{F}(x)$ 在 x 的邻域是常数，则 $\boldsymbol{D}f = 0$。

证明 $\boldsymbol{D}$ 是线性算子(性质 (i))，只需对 $f = 1$ 进行证明．利用性质 (ii)，从 $\boldsymbol{D}1 = \boldsymbol{D}(1 \cdot 1) = (\boldsymbol{D}1)1 + 1(\boldsymbol{D}1) = 2\boldsymbol{D}1$ 得 $\boldsymbol{D}1 = 0$。□

1.9 引理 设 $f \in \mathscr{F}(x)$ 定义在开集 $\mathscr{U} \subset \mathbf{E}$，则存在 x 的星形邻域 $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ 和定义在 $\mathscr{B}$ 的 n 个函数 g_i，使得

$$g_i(x) = \partial_i f(x), \tag{22}$$

$$f(y) = f(x) + (y^i - x^i)g_i(y), \forall y \in \mathscr{B}, \tag{23}$$

其中 y^i 是动点 y 在坐标系 $\{x^i\}$ 的坐标。

证明 令 $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ 是 x 的星形邻域，则 $\forall y \in \mathscr{B}$ 有

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x + t(y - x))\, dt \\ &= f(x) + (y^i - x^i)\int_0^1 \partial_i f(x + t(y - x))\, dt\,. \end{aligned} \tag{24}$$

记

$$g_i(y) = \int_0^1 \partial_i f(x + t(x - x))\, dt\,, \tag{25}$$

就得 (23)，而当 $y = x$ 时，(25) 就给出(22)

$$g_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(x)\, dt = \partial_i f(x).$$

1.10 定理 $T_x\mathbf{E}$ 和 $\mathscr{D}(x)$ 自然同构．

证明 引理 1.7 已证 $\boldsymbol{J}$ 为单射和线性．只需再证 $\boldsymbol{J}$ 为满射．$\forall \boldsymbol{D} \in \mathscr{D}(x)$，记动点 y 的坐标 (函数) y^i 的到 $\mathbf{R}$ 的导数为

$$u^i(x) = \boldsymbol{D}y^i. \tag{26}$$

利用引理 1.8 和 1.9，$\boldsymbol{D}$ 的性质 (i) 和 (ii) 及(26)式，$\forall f \in \mathscr{F}(x)$，我们有

$$f(y) = f(x) + (y^i - x^i)g_i(y),$$

$$\boldsymbol{D}f = \boldsymbol{D}(f(x)) + (\boldsymbol{D}(y^i - x^i))g_i(x) + 0 \cdot \sum_{i=1}^n \boldsymbol{D}g_i$$

$$= 0 + (\boldsymbol{D}y^i)g_i(x) + 0 = u^i(x)\partial_i f(x). \tag{27}$$

设另有坐标系$\{x^{i'} = x^{i'}(x^i)\}$，又记

$$u^{i'}(x) = \boldsymbol{D}y^{i'}. \tag{28}$$

用相同步骤，又得

$$\boldsymbol{D}f = u^{i'}(x)\partial_{i'}f(x). \tag{29}$$

和(27)比较，得

$$u^i(x)\partial_i f(x) = u^{i'}(x)\partial_{i'}f(x) = u^{i'}(x)\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i f(x).$$

由 f 的任意性，上式给出

$$u^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}(x)u^{i'}(x).$$

这说明，$u^i(x)$ 是向量分量。因此，(27)式，即

$$\boldsymbol{D}f = u^i(x)\partial_i|_x f \tag{30}$$

具有与坐标系无关的不变性。根据(16)，(30)式右端正是 f 在点 x 在 $\boldsymbol{u}(x) = u^i(x)\boldsymbol{g}_i(x)$ 方向的方向导数

$$\boldsymbol{u}^D(x)f = u^i(x)\partial_i|_x f. \tag{31}$$

由 f 的任意性，上两式给出 $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{u}^D(x)$ 是零导数，即

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{u}^D(x) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}(x)).$$

因此，任何 $\boldsymbol{D} \in \mathscr{D}(x)$ 均是某 $\boldsymbol{u}(x)$ 在 $\boldsymbol{J}$ 下的象，从而 $\boldsymbol{J}$ 是满射。由于这结论与坐标系无关，$\boldsymbol{J}$ 是自然同构映射。□

在映射 $\boldsymbol{J}$ 下，$\boldsymbol{u}(x)$ 和 $\boldsymbol{u}^D(x) = \boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{\nabla}|_x$ 自然地一一对应。虽然前者是位移向量，后者是导数算子。指定 $\boldsymbol{u}(x)$ 就意味着指定 $\boldsymbol{u}^D(x)$，反之亦然。因此，可以把这两个自然同构的向量空间 $T_x\mathrm{E}$ 和 $\mathscr{D}(x)$ 等同起来，把相对应的元素 $\boldsymbol{u}(x)$ 和 $\boldsymbol{u}^D(x)$ 等同起来，这相当于去掉后者的上标"D"。根据行文就自然清楚，指的是那一个空间的元素，在本章的绝大多数情况下，切向量是在导数意义下的。

对于曲线坐标系$\{x^i\}$，$T_x\mathrm{E}$ 的(协变)基是$\{\boldsymbol{g}_i(x)\}$。在导数意义下对应的是什么呢？下面我们回答这个问题。可以认为，$g_i(x) = \delta_i^j\boldsymbol{g}_j(x)$。于是，由(16)，

$$g_i^D(x) = \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x. \tag{32}$$

将 $g_i^D(x)$ 和 $\boldsymbol{g}_i(x)$ 等同意味着

$$\boldsymbol{g}_i(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x. \tag{33}$$

因此，有如下定理

1.11 定理 在导数意义下，$T_x\mathrm{E}$ 的(协变)基是 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right\}$ (曲线坐标系 $\{x^i\}$ 的自然基)。

1.12 定义 切空间 $T_x\mathrm{E}$ 的对偶空间称为**余切空间**，记作 $T_x^*\mathrm{E}$，它的元素称为**余切向量**或**协变向量**。□

下面我们将给出余切向量的直观概念，并导出余切空间对偶于 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right\}$ 的基。

1.13 定理 设 $f\in\mathscr{F}(x)$。将 f 在 $\boldsymbol{u}(x)$ 方向的方向导数(13)改写为

$$(df)(x)(\boldsymbol{u}(x)) = \boldsymbol{u}(x)f, \qquad \forall \boldsymbol{u}(x)\in T_x\mathrm{E}, \tag{34}$$

则 $(df)(x)$ 是 $T_x\mathrm{E}\to\mathbf{R}$ 的线性映射，因而是一个余切向量。

证明 结论是显然的，因绝对微分 (13) 线性依赖于 $\boldsymbol{u}(x)$。事实上，利用导数含义的向量的性质，亦有

$$\begin{aligned}(df)(x)(\alpha\boldsymbol{u}(x)+\beta\boldsymbol{v}(x)) &= (\alpha\boldsymbol{u}(x)+\beta\boldsymbol{v}(x))f\\ &= \alpha\boldsymbol{u}(x)f+\beta\boldsymbol{v}(x)f = \alpha(df)(x)(\boldsymbol{u}(x))\\ &\quad +\beta(df)(x)(\boldsymbol{v}(x)). \ \square\end{aligned}$$

这里 df 应作为一个符号看待。$(df)(x)$ 是一个映射，常称为函数 f 在点 x 的**微分**，和古典分析中多元函数的微分意义是不同的。但是两者又有联系。此种符号，此种称呼，是事出有因的，后面将论及。

1.14 定理 各曲线坐标函数 x^i 在点 x 的微分是 n 个余切向量，它们的全体 $\{(dx^i)(x)\}$ 构成 $T_x^*\mathrm{E}$ 的一组基，而且和 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x\right\}$ 对偶：

$$(dx^i)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x\right)=\delta^i_j. \tag{35}$$

证明 在 (34) 式，以 x^i 作 f，$\dfrac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x$ 作 $\boldsymbol{u}(x)$，即得 (35)：

$$(dx^i)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x x^i=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x)=\delta^i_j.$$

作 $\{(dx^i)(x)\}$ 的零线性组合

$$\omega_i(dx^i)(x)=\boldsymbol{o},$$

即

$$\omega_i(dx^i)(x)(\boldsymbol{u}(x))=0,\qquad \forall \boldsymbol{u}(x)\in T_x\mathrm{E}.$$

根据 $(dx^i)(x)$ 的线性性质，上式又等价于

$$\omega_i(dx^i)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x\right)=0.$$

将 (35) 代入上式，即得 $\omega_i=0$。从而 $\{(dx^i)(x)\}$ 是一组线性无关的余切向量。

设有任意的余切向量 $\boldsymbol{\omega}\in T^*_x\mathrm{E}$，记

$$\omega_i=\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right), \tag{36}$$

则根据线性性质，$\forall \boldsymbol{u}(x)=u^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\in T_x\mathrm{E}$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u}(x))&=u^i(x)\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right)=\omega_iu^i(x)=\omega_iu^j(x)\delta^i_j\\&=\omega_iu^j(x)(dx^i)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x\right)\\&=(\omega_i(dx^i)(x))\left(u^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x\right)\\&=(\omega_i(dx^i)(x))(\boldsymbol{u}(x)).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{u}(x)$ 的任意性，得

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_i(dx^i)(x)=\left(\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right)\right)(dx^i)(x).$$

这说明，任意余切向量可由 $\{(dx^i)(x)\}$ 线性表出，从而得证定理的结论。□

ω_i 称为余切向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量，按协变法则转换。

1.15 推论 任何 $f\in\mathscr{F}(x)$ 在点 x 的微分可表为

$$(df)(x)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)(dx^i)(x). \tag{37}$$

证明 用(36)式求 $(df)(x)$ 的分量，即得

$$(df)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x f=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x).\ \square$$

(37)式和 f 作为多元函数的微分公式是一致的。这是采用符号"$(df)(x)$"，并称之为 f 的微分的根据。但含义不同，这里 $(df)(x)$ 和 $(dx^i)(x)$ 都是从 $T_x\mathbf{E}$ 到 $\mathbf{R}$ 的算子。如果我们有 $f\in\mathscr{F}(\mathbf{E})$，就可以在 $\mathbf{E}$ 的每一点求 f 的微分，合起来就有余切向量场 $df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$。任何 $\mathscr{F}(\mathbf{E})$-函数的微分是余切向量场。但逆命题非真，只有所谓"**恰当的**"（exact）余切向量场才是某 $\mathscr{F}(x)$-函数的微分。

类似地，我们分别有 r 阶协变，r 阶逆变和 $\binom{r}{s}$ 型张量场：

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r}, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\Psi^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{\Theta}=\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}. \tag{40}$$

1.16 定义 反称的 r 阶协变张量场

$$\boldsymbol{A}=A_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r} \tag{41}$$

称为**微分 r-形式**。引入外积"$\wedge$"，类似于外形式，$\boldsymbol{A}$ 可表为

$$\boldsymbol{A}=\mathscr{A}\boldsymbol{A}=\frac{1}{r!}A_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}A_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.\ \square \tag{42}$$

微分形式的代数运算和外形式的运算相同．特别地，余切向量场 $\boldsymbol{\omega}=\omega_i dx^i$ 就是微分 1-形式．

§2 向量场的 Lie 括弧积和 Lie 代数

在第 V 章 §4，我们用 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 记 E 上光滑向量场的全体．由于

$$\alpha \boldsymbol{u}+\beta \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathrm{E}), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R};\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathrm{E}), \tag{1}$$

$\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 是 R 上的向量空间（无限维）．向量场的加法和数乘是逐点定义的．因此，也有

$$f \boldsymbol{u}+g \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathrm{E}), \qquad \forall f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{E});\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathrm{E}). \tag{2}$$

这件事实我们表述为：$\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 是 $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ 上的**模**（module）．

此外，我们还可以赋予 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 进一步的代数结构．

2.1 定义 在 R 上的向量空间 $\mathscr{V}$ 称为一个（实）**Lie 代数**，如果除了向量空间结构（即加法和数乘），它还定义有 **Lie 括弧积**，即映射

$$[\,,\,]: \mathscr{V} \times \mathscr{V} \rightarrow \mathscr{V};(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}],$$

满足

(i) 反称性 $$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}]=-[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]. \tag{3}$$

(ii) 双线性 $$[\alpha \boldsymbol{u}_1+\beta \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}]=\alpha[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}]+\beta[\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}], \tag{4}$$

(iii) Jacobi 恒等式

$$[\boldsymbol{u},[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]]+[\boldsymbol{v},[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]]+[\boldsymbol{w},[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]]=\boldsymbol{o}. \ \square \tag{5}$$

例 1. 以通常的叉积作为 Lie 括弧积

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]:=\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \tag{6}$$

三维内积空间 $\mathscr{V}^3$ 是一个 Lie 代数．叉积的反称性和双线性是已知事实．将 (6) 代入 (5)，并利用 $\mathscr{V}^3$ 向量代数的公式

$$\boldsymbol{u} \times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u} \boldsymbol{w}) \boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u} \boldsymbol{v}) \boldsymbol{w},$$

得

$$\boldsymbol{u} \times(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})+\boldsymbol{v} \times(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})+\boldsymbol{w} \times(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}.$$

因此，Jacobi 恒等式也是满足的．

例 2. 在通常的矩阵加法和数乘下，n 阶实矩阵的全体构成一个 $n\times n$ 维向量空间 $\mathscr{M}_n(\mathrm{R})$. 由 $X, Y\in\mathscr{M}_n(\mathrm{R})\Rightarrow XY\in\mathscr{M}_n(\mathrm{R})$，$\mathscr{M}_n(\mathrm{R})$ 又是一个 R 上的代数. 若以**换位子** (commutator) 定义 Lie 括弧积：

$$[X, Y]:=XY-YX, \tag{7}$$

则 $\mathscr{M}_n(\mathrm{R})$ 又是一个 Lie 代数. □

我们旨在合适地定义两个向量场 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 的 Lie 括弧积，使向量空间 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 成为一个 Lie 代数. $\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 是无限维的，叉积没有定义，例 1 对我们没有用处. 例 2 倒能提供启发. 但向量场 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的换位子 $\boldsymbol{uv}-\boldsymbol{vu}$ 中的 $\boldsymbol{uv}$ 和 $\boldsymbol{vu}$ 该如何理解呢? 显然不能是内积.

2.2 定理 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 是任意两向量场，则按条件

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)f=\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f)-\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f), \forall x\in\mathrm{E}; f\in\mathscr{F}(x) \tag{8}$$

逐点定义的 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ 可以作为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的 Lie 括弧积而使 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 成为一个 Lie 代数. □

(8) 式右端第一项的 $\boldsymbol{v}f$ 是一个函数，它在点 x 邻域内的任意点 y 的值 $\boldsymbol{v}f(y)=\boldsymbol{v}(y)f$. 因 $\boldsymbol{v}$ 和 f 在 x 邻域均光滑，故 $\boldsymbol{v}f\in\mathscr{F}(x)$.

证明 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ 是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的 Lie 括弧积，如果它 i) 属于 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$; ii) 满足条件 (3—5).

先证 i). 因在 (8) 中，$\boldsymbol{v}f, \boldsymbol{u}f\in\mathscr{F}(x)$，故 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)$ 是从 $\mathscr{F}(x)$ 到 R 的映射. 再者，$\forall\alpha, \beta\in\mathrm{R}$; $f, g\in\mathscr{F}(x)$，我们有

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)(\alpha f+\beta g) &= \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}(\alpha f+\beta g)) \\
&\quad -\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}(\alpha f+\beta g)) \\
&= \boldsymbol{u}(x)(\alpha\boldsymbol{v}f+\beta\boldsymbol{v}g)-\boldsymbol{v}(x)(\alpha\boldsymbol{u}f+\beta\boldsymbol{u}g) \\
&= \alpha[\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f)-\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f)] \\
&\quad +\beta[\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}g)-\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}g)] \\
&= \alpha[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)f+\beta[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)g,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)(fg) &= \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}(fg))-\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}(fg)) \\
&= \boldsymbol{u}(x)[(\boldsymbol{v}f)g+f(\boldsymbol{v}g)]-\boldsymbol{v}(x)[(\boldsymbol{u}f)g+f(\boldsymbol{u}g)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f))g(x) + (\boldsymbol{v}(x)f)\boldsymbol{u}(x)g \\
&\quad + (\boldsymbol{u}(x)f)\boldsymbol{v}(x)g + f(x)\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}g) \\
&\quad - (\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f))g(x) - (\boldsymbol{u}(x)f)\boldsymbol{v}(x)g \\
&\quad - (\boldsymbol{v}(x)f)\boldsymbol{u}(x)g - f(x)\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}g) \\
&= [\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f) - \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f)]g(x) \\
&\quad + f(x)[\boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}g) - \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}g)] \\
&= ([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}](x)f)g(x) + f(x)([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}](x)g).
\end{aligned}
$$

因此，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)$ 是 $\mathscr{F}(x)$ 到 $\mathbf{R}$ 的导数，即导数含义下的向量．如果 $f\in\mathscr{F}(\mathbf{E})$，则 $\boldsymbol{v}f$，$\boldsymbol{u}f$ 和 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}f)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}f)$ 也都属于 $\mathscr{F}(\mathbf{E})$，从而 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\in\mathscr{X}(\mathbf{E})$．

现证 ii)．从定义出发，$\forall f\in\mathscr{F}(x)$；$\alpha, \beta\in\mathbb{R}$；$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in\mathscr{X}(\mathbf{E})$，有

(i) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)f = \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f) - \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f) = -[\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f) - \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f)] = -[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}](x)f$,

(ii)
$$
\begin{aligned}
[\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}](x)f &= (\alpha\boldsymbol{u}_1(x) + \beta\boldsymbol{u}_2(x))(\boldsymbol{v}f) \\
&\quad - \boldsymbol{v}(x)((\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2)f) \\
&= \alpha\boldsymbol{u}_1(x)(\boldsymbol{v}f) + \beta\boldsymbol{u}_2(x)(\boldsymbol{v}f) - \alpha\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}_1f) \\
&\quad - \beta\boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}_2f) \\
&= \alpha[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}](x)f + \beta[\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}](x)f \\
&= (\alpha[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}] + \beta[\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}])(x)f,
\end{aligned}
$$

(iii)
$$
\begin{aligned}
&([\boldsymbol{u}, [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]] + [\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]] + [\boldsymbol{w}, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]])(x)f \\
&= \boldsymbol{u}(x)([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]f) - [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}](x)(\boldsymbol{u}f) \\
&\quad + \boldsymbol{v}(x)([\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}]f) - [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}](x)(\boldsymbol{v}f) \\
&\quad + \boldsymbol{w}(x)([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]f) - [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)(\boldsymbol{w}f) \\
&= \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}f) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}f)) - \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}f)) \\
&\quad + \boldsymbol{w}(x)(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}f)) + \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}f) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}f)) \\
&\quad - \boldsymbol{w}(x)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}f)) + \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}f)) \\
&\quad + \boldsymbol{w}(x)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}f) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}f)) - \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}f)) \\
&\quad + \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{w}f)) = 0.
\end{aligned}
$$

由 f 的任意性，上面涉及的向量场在每 $x\in\mathbf{E}$ 满足 (3—5)，从而在

$\mathbf{E}$ 满足 (3—5)。

2.3 定理 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathbf{E})$，则

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{u}(\nabla \otimes \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \operatorname{grad} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \boldsymbol{u} \quad (9)$$

$$= (u^j \nabla_j v^i - v^j \nabla_j u^i)\boldsymbol{g}_i = (u^j \partial_j v^i - v^j \partial_j u^i)\boldsymbol{g}_i. \quad (10)$$

证明 按向量的第一含义用 (1.14) 将 (8) 改写，得

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)(\nabla f(x)) &= \boldsymbol{u}(x)(\nabla(\boldsymbol{v}(\nabla f))(x)) \\
&\quad - \boldsymbol{v}(x)(\nabla(\boldsymbol{u}(\nabla f))(x)) = \boldsymbol{u}(x)(\nabla \otimes \boldsymbol{v})(x)(\nabla f(x)) \\
&\quad + (\boldsymbol{u}(x) \otimes \boldsymbol{v}(x)) : (\nabla \otimes \nabla f(x)) \\
&\quad - \boldsymbol{v}(x)(\nabla \otimes \boldsymbol{u})(x)(\nabla f(x)) \\
&\quad - (\boldsymbol{v}(x) \otimes \boldsymbol{u}(x)) : (\nabla \otimes \nabla f(x)) \\
&= (\boldsymbol{u}(\nabla \otimes \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla \otimes \boldsymbol{u}))(x)(\nabla f(x)). \quad (11)
\end{aligned}$$

上面用到在 $\mathbf{E}$ 求梯度次序的可交换性。由 f 和 x 的任意性，(11) 式导至 (9) 式。$(10)_1$ 式是 (9) 式的分量表示。考虑到联络系数的对称性，又得 $(10)_2$。

也可以利用 (1.16) 于 (8)，首先证明分量表示 $(10)_2$。由

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^i(x)\partial_i|_x f &= u^j(x)\partial_j|_x(v^i\partial_i f) - v^j(x)\partial_j|_x(u^i\partial_i f) \\
&= (u^j\partial_j v^i)(x)\partial_i|_x f + u^j(x)v^i(x)\partial_j\partial_i f(x) \\
&\quad - (v^j\partial_j u^i)(x)\partial_i|_x f - v^j(x)u^i(x)\partial_j\partial_i f(x) \\
&= (u^j\partial_j v^i - v^j\partial_j u^i)(x)\partial_i|_x f
\end{aligned}$$

得

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^i = u^j\partial_j v^i - v^j\partial_j u^i. \quad \square$$

定义条件 (8) 给人的感觉：$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)$ 是二阶微分算子。从定理 2.3 的证明过程看到，对称性消去了二阶导数。因此，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)$ 仍然是一阶微分算子。这和 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x) \in T_x\mathbf{E}$ 是一致的。

§3 区域映射和导映射

一个物体的变形可以看作 $\mathbf{E}$ 的一个开域 $\mathscr{U}$ (或 $\mathbf{E}$ 本身，当物体相当大而可视作无穷大时)到 $\mathbf{E}$ 的映射。物体的运动则可看成是一族依赖于参量 t (时间)的映射。因此，从数学上研究这种映

射是有意义的．物体是不会消失或相互渗透的（经典的物质模型）．这可成为对映射的一些附加条件的物理依据．这些条件却给映射的研究带来简化和方便．为了用不大篇幅将主要思想阐述清楚，我们将不注意光滑性的细节而总是假设，一切都是光滑的．

3.1 定义　微分同胚映射

$$\varphi:\mathscr{U}\subset\mathbf{E}\to\mathscr{W}\subset\mathbf{E}:X\longmapsto\varphi(X)\ (\text{或}\ x(X))$$

称为**区域映射**，其中 $\mathscr{W}=\varphi(\mathscr{U})$．微分同胚 φ 是双射，并且 φ 和 φ^{-1} 都是光滑的（其实 C^1 就可以），即如果 $\{X^A\}$ 和 $\{x^i\}$ 分别是定义在 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{W}$ 的任意曲线坐标系，则 φ 和 φ^{-1} 的坐标表示

$$x^i=x^i(X^A)\ \text{和}\ X^A=X^A(x^i) \tag{1}$$

都是 C^∞ 的，而且

$$\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial X^A}\right]\neq 0\ \text{在}\ \mathscr{U},\ \det\left[\frac{\partial X^A}{\partial x^i}\right]\neq 0\ \text{在}\ \mathscr{W}.\ \square \tag{2}$$

3.2 定理　设 φ 是区域映射，则对于 $X\in\mathscr{U}$，条件[1]

$$(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})f=\boldsymbol{U}(f\circ\varphi),\ \forall\boldsymbol{U}\in T_X\mathscr{U};\ f\in\mathscr{F}(\varphi(X)) \tag{3}$$

定义点 $\varphi(X)$ 的一个切向量 $\varphi_*(X)\boldsymbol{U}\in T_{\varphi(X)}\mathscr{W}$，并从而定义映射

$$\varphi_*(X):T_X\mathscr{U}\to T_{\varphi(X)}\mathscr{W}, \tag{4}$$

称为 φ 在点 X 的**导映射**．导映射是线性和双射映射，即同构映射．

证明　首先证明 $\varphi_*(X)\boldsymbol{U}$ 是点 $\varphi(X)$ 处的切向量．只需利用 (3)，$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R};\ f,g\in\mathscr{F}(\varphi(X))$，验证满足定理 1.4 的条件 (i) 和 (ii)．

$$\begin{aligned}(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})(\alpha f+\beta g)&=\boldsymbol{U}((\alpha f+\beta g)\circ\varphi)\\&=\boldsymbol{U}(\alpha f\circ\varphi+\beta g\circ\varphi)=\alpha\boldsymbol{U}(f\circ\varphi)+\beta\boldsymbol{U}(g\circ\varphi)\\&=\alpha(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})f+\beta(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})g,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})(fg)&=\boldsymbol{U}((fg)\circ\varphi)=\boldsymbol{U}((f\circ\varphi)(g\circ\varphi))\\&=(\boldsymbol{U}(f\circ\varphi))g\circ\varphi(X)+f\circ\varphi(X)(\boldsymbol{U}(g\circ\varphi))\\&=((\varphi_*(X)\boldsymbol{U})f)g(\varphi(X))+f(\varphi(X))(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})g.\end{aligned}$$

其次，证 $\varphi_*(X)$ 是线性映射．$\forall\alpha,\ \beta\in\mathbf{R};\ \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}\in T_X\mathscr{U}$；

1) “$\circ$”表示映射的复合：$f\circ\varphi(X)=f(\varphi(X))$．

$f\in\mathscr{F}(\varphi(X))$，有

$$(\varphi_*(X)(\alpha\boldsymbol{U}+\beta\boldsymbol{V}))f=(\alpha\boldsymbol{U}+\beta\boldsymbol{V})(f\circ\varphi)$$
$$=\alpha\boldsymbol{U}(f\circ\varphi)+\beta\boldsymbol{V}(f\circ\varphi)=\alpha(\varphi_*(X)\boldsymbol{U})f$$
$$+\beta(\varphi_*(X)\boldsymbol{V})f=(\alpha\varphi_*(X)\boldsymbol{U}+\beta\varphi_*(X)\boldsymbol{V})f.$$

由 f 的任意性，得 $\varphi_*(X)$ 的线性.

再证 $\varphi_*(X)$ 是单射. $\varphi_*(X)\boldsymbol{U}=\varphi_*(X)\boldsymbol{V}$，即

$$\boldsymbol{U}(f\circ\varphi)=\boldsymbol{V}(f\circ\varphi),\qquad \forall f\in\mathscr{F}(\varphi(X)).$$

由 f 的任意性，得 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}$. 最后，为了证 $\varphi_*(X)$ 是满射[1]，只需指出存在 $\varphi_*(X)$ 的逆. 由于 φ 是微分同胚，存在逆映射 φ^{-1}，使得 $\varphi^{-1}\circ\varphi=id$. φ^{-1} 也是微分同胚，它有导映射

$$(\varphi^{-1})_*(\varphi(X)):T_{\varphi(X)}\mathscr{W}\to T_X\mathscr{U},$$

满足

$$((\varphi^{-1})_*(\varphi(X))\boldsymbol{u})F=\boldsymbol{u}(F\circ\varphi^{-1}),$$
$$\forall\boldsymbol{u}\in T_{\varphi(X)}\mathscr{W};F\in\mathscr{F}(X).\tag{5}$$

由于 $(\varphi^{-1})_*(\varphi(X))\boldsymbol{u}\in T_X\mathscr{U}$，$F\circ\varphi^{-1}\in\mathscr{F}(\varphi(X))$，有

$$\varphi_*(X)((\varphi^{-1})_*(\varphi(X))\boldsymbol{u})(F\circ\varphi^{-1})$$
$$=(\varphi^{-1})_*(\varphi(X))\boldsymbol{u}(F\circ\varphi^{-1}\circ\varphi)$$
$$=((\varphi^{-1})_*(\varphi(X))\boldsymbol{u})F=\boldsymbol{u}(F\circ\varphi^{-1}).$$

由 F 及 $\boldsymbol{u}$ 的任意性，左右两端给出

$$\varphi_*(X)\circ(\varphi^{-1})_*(\varphi(X))=id.$$

因此，$(\varphi^{-1})_*$ 就是 φ_* 的逆 $(\varphi_*)^{-1}$，笼统地可记作 φ_*^{-1}. □

3.3 定理 设向量场 $\boldsymbol{U}=U^A\dfrac{\partial}{\partial X^A}\in\mathscr{X}(\mathscr{U})$ 在 φ_* 下的象是 $\boldsymbol{u}=u^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in\mathscr{X}(\mathscr{W})$：

$$\boldsymbol{u}=\varphi_*\boldsymbol{U},\tag{6}$$
$$\boldsymbol{U}=\varphi_*^{-1}\boldsymbol{u},\tag{7}$$

则在 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{W}$ 的曲线坐标系 $\{X^A\}$ 和 $\{x^i\}$ 下，(6) 和 (7) 有分量表示：

---

1) 如果考虑到 $\dim(T_X\mathscr{U})=\dim(T_{\varphi(X)}\mathscr{W})$，满射的证明是多余的.

$$u^i = x^i_{,A} U^A, \tag{8}$$

$$U^A = X^A_{,i} u^i. \tag{9}$$

证明 对于在点 $X \in \mathscr{U}$ 的基向量 $\left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_X$ 和任意 $f \in \mathscr{F}(\varphi(X))$，根据(3)，从

$$\left(\varphi_*(X) \left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_X\right) f = \left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_X (f \circ \varphi)$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial X^A}(X) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(X))$$

$$= \left(x^i_{,A} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) f(x(X))$$

$$= \left(x^i_{,A}(X) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x(X)}\right) f$$

有

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial x^A} = x^i_{,A} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10}$$

于是，利用(6)，(10)及 φ_* 的线性性质，从

$$u^i \frac{\partial}{\partial x^i} = U^A \varphi_* \frac{\partial}{\partial X^A} = x^i_{,A} U^A \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{11}$$

及 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 的线性无关，即得(8)。

类似地，对于 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ 和任意 $F \in \mathscr{F}(X)$，根据(5)，从

$$\left(\varphi_*^{-1}(x(X)) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right) F = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (F \circ \varphi^{-1})$$

$$= \frac{\partial X^A}{\partial x^i}(x) \frac{\partial F}{\partial X^A}(X(x)) = \left(X^A_{,i} \frac{\partial}{\partial X^A}\right) F(X(x))$$

$$= \left(X^A_{,i}(x) \left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_{X(x)}\right) F$$

有

$$\varphi_*^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} = X^A_{,i} \frac{\partial}{\partial X^A}. \tag{12}$$

并且，利用 (7)，(12) 及 φ_*^{-1} 的线性性质，从

$$U^A \frac{\partial}{\partial X^A} = u^i \varphi_*^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} = X^A_{,i} u^i \frac{\partial}{\partial X^A} \tag{13}$$

及 $\left\{\frac{\partial}{\partial X^A}\right\}$ 的线性无关，又得 (9)。其实，区域映射条件 (2) 使矩阵 $[x^i_{,A}]$ 有逆 $[X^A_{,i}]$。将写成矩阵形式的 (8) 乘以 $[X^A_{,i}]$ 就得(9)。□

3.4 记注 我们这里给出 (6) 和 (7) 式的一个几何解释。设过 $X\in\mathscr{U}$ 有光滑曲线$C: I\subset \mathrm{R} \to \mathscr{U}: t\longmapsto C(t)$，其中 $X=C(0)$。在区域映射 φ 下，在 $\mathscr{W}$ 对应有曲线 $c=\varphi(C): I\to\mathscr{W}: t\longmapsto c(t)=\varphi(C(t))$，其中 $x=c(0)=\varphi(C(0))$。若把 X 看作在瞬间 $t=0$ 以速度 $\dot{X}(X)=\dot{C}(0)=\dot{X}^A(X)\frac{\partial}{\partial X^A}\Big|_X$ 沿 C 运动的动点，则其象点 $x=\varphi(X)$ 相应地在该瞬间以速度 $\dot{x}(x)=\dot{c}(0)=\dot{x}^i(x)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x(X)}$ 沿 c 运动。利用 (1) 计算 $\dot{x}^i(x)$，得

$$\dot{x}^i(x(X)) = x^i_{,A}(X)\dot{X}^A(X). \tag{14}$$

和 (8) 对照，根据 (6)，就有

$$\dot{x} = \varphi_*\dot{X}. \tag{15}$$

同理，有

$$\dot{X} = \varphi_*^{-1}\dot{x}. \tag{16}$$

这说明，导映射给出相应动点的速度向量的对应。□

正如向量空间到自身的线性变换由唯一的仿射量在右作用下或其转置在左作用下实现，区域映射的导映射有相似但略复杂的形势：φ_* 是两个不同向量空间之间，即切空间 $T_X\mathscr{U}$ 到象切空间 $T_{\varphi(X)}\mathscr{W}$ 的线性变换。类似于 § 1 中混合型张量的定义，将张量积运算“$\otimes$”推广至两个不同切空间的元素，就得到所谓两点仿射量，或进而得两点张量。这样，我们就有

3.5 定理 区域映射 φ 的导映射 φ_* 由唯一的两点仿射量场在右作用下或其转置在左作用下实现：

$$\boldsymbol{u} = \varphi_*\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}^*, \tag{17}$$

其中两点仿射量场

$$\boldsymbol{F} = x\otimes\nabla_{\mathscr{U}} = x^i_{,A}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dX^A, \tag{18}$$

$$F^* = (x\otimes\nabla_{\mathscr{U}})^* = \nabla_{\mathscr{U}}\otimes x = \partial_A x^i dX^A \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{19}$$

并且对 φ_*^{-1} 亦有

$$U = \varphi_*^{-1}u = F^{-1}u = uF^{-*}, \tag{20}$$

$$F^{-1} = X\otimes\nabla_{\mathscr{V}} = X^A_{,i}\frac{\partial}{\partial X^A}\otimes dx^i, \tag{21}$$

$$F^{-*} = (X\otimes\nabla_{\mathscr{V}})^* = \nabla_{\mathscr{V}}\otimes X = \partial_i X^A dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial X^A}. \tag{22}$$

这里

$$F^{-1}F = (X\otimes\nabla_{\mathscr{V}})(x\otimes\nabla_{\mathscr{U}}) = I_{\mathscr{U}}, \tag{23}$$

$$FF^{-1} = (x\otimes\nabla_{\mathscr{U}})(X\otimes\nabla_{\mathscr{V}}) = I_{\mathscr{V}}, \tag{24}$$

$$F^{-*}F^* = (FF^{-1})^* = (\nabla_{\mathscr{V}}\otimes X)(\nabla_{\mathscr{U}}\otimes x) = I_{\mathscr{V}}, \tag{25}$$

$$F^*F^{-*} = (F^{-1}F)^* = (\nabla_{\mathscr{U}}\otimes x)(\nabla_{\mathscr{V}}\otimes X) = I_{\mathscr{U}}. \tag{26}$$

证明 只需利用 (1.8) 和 (1.35) 将 (11) 和(13)分别改写,即得(17—22).

$$\begin{aligned} u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i} &= x^i_{,A}\delta^A_B U^B\frac{\partial}{\partial x^i} = x^i_{,A}\left(dX^A\left(\frac{\partial}{\partial X^B}\right)\right)U^B\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(x^i_{,A}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dX^A\right)\left(U^B\frac{\partial}{\partial X^B}\right) \\ &= \left(U^B\frac{\partial}{\partial X^B}\right)\left(\partial_A x^i dX^A\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = U^A\frac{\partial}{\partial X^A} &= X^A_{,i}\delta^i_j u^j\frac{\partial}{\partial X^A} = X^A_{,i}\left(dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)u^j\frac{\partial}{\partial X^A} \\ &= \left(X^A_{,i}\frac{\partial}{\partial X^A}\otimes dx^i\right)\left(u^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \left(u^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(\partial_i X^A dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial X^A}\right). \end{aligned}$$

将 (17) 代入 (20), 我们有

$$U = F^{-1}FU.$$

由 U 的任意性,上式给出 (23). 这里 $F^{-1}F$ 已是 $\mathscr{U}$ 的仿射量场,而且是单位仿射量场,故用 $I_{\mathscr{U}}$ 表示. (24—26) 可类似地证明.如果用分量表示, 例如 (23) 和 (25), $X^A_{,i}x^i_{,B} = \delta^A_B$, $\partial_i X^A\partial_A x^j = \delta^j_i$, 结果就是显然的. □

形象地说，两点仿射量，譬如 $\boldsymbol{F}(X)$，好象一条腿站在点 $X\in\mathscr{U}$，而另一条腿站在 $x(X)\in\mathscr{W}$ 上。"$\nabla_{\mathscr{U}}$" 和 "$\nabla_{\mathscr{W}}$" 分别表示在 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{W}$ 的"nabla"。这里 X 和 x 都不是张量场，但我们仍例外地表示它们的梯度。理由如下：如果我们求 (1) 的 n 个坐标函数 x^i 在点 X 在 $\boldsymbol{U}$ 方向的梯度

$$
\begin{aligned}
Dx^i(X;\boldsymbol{U}(X)) &= (x^i\otimes\nabla_{\mathscr{U}})(X)\boldsymbol{U}(X) \\
&= \boldsymbol{U}(X)(\nabla_{\mathscr{U}}\otimes x^i)(X)
\end{aligned}
$$

并将这 n 个式子合起来，就有

$$
Dx(X;\boldsymbol{U}(X)) = (x\otimes\nabla_{\mathscr{U}})(X)\boldsymbol{U}(X) = \boldsymbol{U}(X)(\nabla_{\mathscr{U}}\otimes x)(X). \tag{27}
$$

上式左端是当点 X 移动 $\boldsymbol{U}(X)$ 所对应的点 x 的位移的线性主部 $\boldsymbol{u}(x) = Dx(X;\boldsymbol{U}(X))$。当 X 取遍 $\mathscr{U}$，就得

$$
\boldsymbol{u} = (x\otimes\nabla_{\mathscr{U}})\boldsymbol{U}. \tag{28}
$$

这正是 (17, 18) 式。容易验证，$\boldsymbol{F}$ 的分量 $x^i_{,A}$ 是按 $\{x^i\}$ 的一阶逆变和 $\{X^A\}$ 的一阶协变法则而转换的。从这角度也可解释"两点张量(仿射量)"一词的来源。文献中，导映射 φ_* 还有其他名称，如**推前** (push-forward)，**映射的微分**，**Jacobi 映射**等。在力学上 $\boldsymbol{F}$ 还称为**变形梯度**。

如果用函数微分的定义公式 (1.34) 改写左右端相换的 (3) 式，得

$$
\begin{aligned}
&(d(f\circ\varphi))(X)(\boldsymbol{U}(X)) = (df)(x)(\varphi_*(X)\boldsymbol{U}(X)), \\
&\quad \forall f\in\mathscr{F}(\varphi(X));\boldsymbol{U}\in\mathscr{X}(\mathscr{U}).
\end{aligned} \tag{29}
$$

它表明，区域映射 φ 把 $(d(f\circ\varphi))(X)\in T^*_X\mathscr{U}$ 对应于任意函数 f 的微分 $(df)(x)\in T^*_{\varphi(X)}\mathscr{W}$。要使这种对应成为 $T^*_{\varphi(X)}\mathscr{W}\to T^*_X\mathscr{U}$ 的映射，只要在 (29) 取坐标函数 x^i 为 f，两端乘以 $\boldsymbol{\omega} = \omega_i dx^i\in\mathscr{X}^*(\mathscr{W})$ 的分量 $\omega_i(x)$，再求和，并考虑到

$$
(d(x^i\circ\varphi))(X) = \frac{\partial(x^i\circ\varphi)}{\partial X^A}(X)(dX^A)(X) = x^i_{,A}(X)(dX^A)(X),
$$

得[1]

---

1) $\mathscr{X}^*(\mathscr{U})$ 是 $\mathscr{U}$ 上的光滑余切向量场的全体。

$$(\omega_i x^i_{,A})(X)(dX^A)(X)(\boldsymbol{U}(X)) = \boldsymbol{\omega}(x)(\varphi_*(X)\boldsymbol{U}(X)),$$
$$\forall X \in \mathscr{U};\ \boldsymbol{U} \in \mathscr{X}(\mathscr{U});\boldsymbol{\omega} \in \mathscr{X}^*(\mathscr{W}). \tag{30}$$
它使 $\boldsymbol{\Omega}(X) \equiv (\omega_i x^i_{,A})(X)(dX^A)(X) \in T^*_X\mathscr{U}$ 对应于任意 $\boldsymbol{\omega}(x) \in T_{\varphi(X)}\mathscr{W}$. 于是,我们有

3.6 定理 区域映射 φ 在每一点 $x = \varphi(X) \in \mathscr{W}$ 诱导一个同构映射
$$\varphi^*(x(X)): T^*_{\varphi(X)}\mathscr{W} \to T^*_X\mathscr{U}, \tag{31}$$
满足
$$(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}(x))(\boldsymbol{U}(X)) = \boldsymbol{\omega}(x)(\varphi_*(X)\boldsymbol{U}(X)),$$
$$\forall \boldsymbol{U} \in \mathscr{X}(\mathscr{U});\ \boldsymbol{\omega} \in \mathscr{X}^*(\mathscr{W}), \tag{32}$$
φ^* 称为**拉回映射** (pull-back).

若余切向量场 $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_A dX^A \in \mathscr{X}^*(\mathscr{U})$ 是 $\boldsymbol{\omega} = \omega_i dx^i \in \mathscr{X}^*(\mathscr{W})$ 在拉回映射 φ^* 下的象:
$$\boldsymbol{\Omega} = \varphi^*\boldsymbol{\omega}, \tag{33}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \varphi^{-*}\boldsymbol{\Omega}, \tag{34}$$
则上两式有分量表示:
$$\Omega_A = \omega_i x^i_{,A}, \tag{35}$$
$$\omega_i = \Omega_A X^A_{,i}. \tag{36}$$

证明 定理的前半部份的证明类似于定理 3.2, 不再细述. 今证 (35) 和 (36) 式. 为此, 在 (32) 中取 dx^i 和 $\frac{\partial}{\partial X^A}$ 分别为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{U}$, 利用 (10) 和 (1.35), 得
$$(\varphi^*(x)(dx^i)(x))\left(\left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_X\right) = (dx^i)(x)\left(\varphi_*(X)\left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_X\right)$$
$$= (dx^i)(x)\left(x^j_{,A}(X)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x\right)$$
$$= x^j_{,A}(X)(dx^i)(x)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x\right) = x^j_{,A}(X)\delta^i_j = x^i_{,A}(X).$$
利用上式, 将 $\varphi^*(x)(dx^i)(x) \in T^*_X\mathscr{U}$ 在基 $\{dX^A(X)\}$ 上分解, 得
$$\varphi^*(x)(dx^i)(x) = \left((\varphi^*(x)(dx^i)(x)\left(\left.\frac{\partial}{\partial X^A}\right|_X\right)\right)(dX^A)(X)$$

$$= x^i_{,A}(X)dX^A(X).$$

由此，得

$$\varphi^* dx^i = x^i_{,A} dX^A. \tag{37}$$

将 (37) 代入 (33)，考虑到 φ^* 的线性性质，有

$$\Omega_A dX^A = \omega_i \varphi^* dx^i = \omega_i x^i_{,A} dX^A,$$

从而得证 (35)。因 φ^* 是同构映射，(34) 式显然成立。类似地，应用 (12)，又有

$$\varphi^{-*} dX^A = X^A_{,i} dx^i, \tag{38}$$

从而又得(36)。□

类似于定理 3.4，利用 (37) 和 (38)，又可证

3.7 定理 拉回映射 φ^* 由唯一的两点仿射量场在左作用下或其转置在右作用下实现：

$$\boldsymbol{\Omega} = \varphi^* \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(x \otimes \boldsymbol{\nabla}_{\mathscr{U}}) = \boldsymbol{\omega F} = \boldsymbol{F}^* \boldsymbol{\omega}. \tag{39}$$

同理对 φ^{-*} 亦有

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi^{-*} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(X \otimes \boldsymbol{\nabla}_{\mathscr{W}}) = \boldsymbol{\Omega F}^{-1} = \boldsymbol{F}^{-*} \boldsymbol{\Omega}, \tag{40}$$

其中 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}^*$, $\boldsymbol{F}^{-1}$, $\boldsymbol{F}^{-*}$ 见定理 3.4。□

在定理 3.6 中，用 φ^{-1} 代替 φ，条件 (32) 成为

$$(\varphi^{-*}(X)\boldsymbol{\Omega}(X))(\boldsymbol{u}(x)) = \boldsymbol{\Omega}(X)(\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}(x)),$$
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathscr{X}(\mathscr{W}); \boldsymbol{\Omega} \in \mathscr{X}^*(\mathscr{U}). \tag{41}$$

以此为根据，我们可以将 φ^{-1} 的拉回映射同态扩张至 r 阶协变张量场[1]，对任意点 $X \in \mathscr{U}$：

$$\varphi^{-*}(X): \mathscr{T}_r(T_X\mathscr{U}) \to \mathscr{T}_r(T_{\varphi(X)}\mathscr{W}),$$

使得

$$(\varphi^{-*}(X)\boldsymbol{\Phi}(X))(\boldsymbol{u}_1(x), \cdots, \boldsymbol{u}_r(x))$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(X)(\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_1(x), \cdots, \varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_r(x)),$$
$$\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{X}_r^*(\mathscr{U}); \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \in \mathscr{X}(\mathscr{W}). \tag{42}$$

根据 (1.8)，条件 (32) 又可写成

1) $\mathscr{X}^r(\mathscr{U})$, $\mathscr{X}_r^*(\mathscr{U})$, $\mathscr{X}_s^r(\mathscr{U})$ 分别表示在 $\mathscr{U}$ 的光滑的 r 阶逆变，r 阶协变和 $\binom{r}{s}$ 型张量场的全体。

$$(\varphi_*(X)\boldsymbol{U}(X))(\boldsymbol{\omega}(x)) = \boldsymbol{U}(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}(x)),$$
$$\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathscr{X}^*(\mathscr{W}); \boldsymbol{U} \in \mathscr{X}(\mathscr{U}). \tag{43}$$

于是，我们又可以将 φ 的推前映射同态扩张至 r 阶逆变张量场，对任意点 $X \in \mathscr{U}$：

$$\varphi_*(X): \mathscr{T}^r(T_X\mathscr{U}) \to \mathscr{T}^r(T_{\varphi(X)}\mathscr{W}),$$

使得

$$(\varphi_*(X)\boldsymbol{\Psi}(X)(\boldsymbol{\omega}_1(x), \cdots, \boldsymbol{\omega}_r(x))$$
$$= \boldsymbol{\Psi}(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_1(x), \cdots, \varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_r(x)),$$
$$\forall \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{X}^r(\mathscr{U}); \boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_r \in \mathscr{X}^*(\mathscr{W}). \tag{44}$$

更一般地，我们有

3.8 定义 区域映射 φ 对每一类型张量场诱导一个映射，称为推前映射的**同态扩张**（仍都用推前的符号表示）。它在每一点 X：

$$\varphi_*(X): \mathscr{T}^r_s(T_X\mathscr{U}) \to \mathscr{T}^r_s(T_{\varphi(X)}\mathscr{W}),$$

满足

$$(\varphi_*(X)\boldsymbol{\Theta}(X))(\boldsymbol{\omega}_1(x), \cdots, \boldsymbol{\omega}_r(x), \boldsymbol{u}_1(x), \cdots, \boldsymbol{u}_s(x))$$
$$= \boldsymbol{\Theta}(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_1(x), \cdots, \varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_r(x),$$
$$\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_1(x), \cdots, \varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_s(x)),$$
$$\forall \boldsymbol{\Theta} \in \mathscr{X}^r_s(\mathscr{U}); \boldsymbol{\omega}_1, \cdots, \boldsymbol{\omega}_r \in \mathscr{X}^*(\mathscr{W}); \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_s \in \mathscr{X}(\mathscr{W}). \tag{45}$$

3.9 定理 推前映射的同态扩张有性质：

(i) 是线性同构映射，

(ii) 对任意类型的张量场 $\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2$：

$$\varphi_*(\boldsymbol{\Theta}_1 \otimes \boldsymbol{\Theta}_2) = (\varphi_*\boldsymbol{\Theta}_1) \otimes (\varphi_*\boldsymbol{\Theta}_2). \tag{46}$$

特别地，对 $\boldsymbol{U} \in \mathscr{X}(\mathscr{U})$，$\boldsymbol{\Omega} \in \mathscr{X}^*(\mathscr{U})$：

$$\varphi_*(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{\Omega}) = (\varphi_*\boldsymbol{U}) \otimes (\varphi^{-*}\boldsymbol{\Omega}), \tag{47}$$

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial X^A} \otimes dX^B\right) = \left(x^i_{,A}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \otimes (X^B_{,j}dx^j), \tag{48}$$

(iii) 设 $\boldsymbol{\Theta} = \Theta^{A_1\cdots A_r}{}_{B_1\cdots B_s}\dfrac{\partial}{\partial X^{A_1}} \otimes \cdots \otimes \dfrac{\partial}{\partial X^{A_r}} \otimes dX^{B_1} \otimes \cdots \otimes dX^{B_s}$.

若记 $\boldsymbol{\Theta}$ 在推前同态扩张 φ_* 下的像为

$$\boldsymbol{\theta}=\theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}=\varphi_*\boldsymbol{\Theta},$$

(49)

则其分量为

$$\theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}=x^{i_1}{}_{,A_1}\cdots x^{i_r}{}_{,A_r}X^{B_1}{}_{,j_1}\cdots X^{B_s}{}_{,j_s}\Theta^{A_1\cdots A_r}{}_{B_1\cdots B_s}. \qquad (50)$$

证明 (i) 留给读者.

(ii) 为简单计，设 $\boldsymbol{\Theta}_1,\boldsymbol{\Theta}_2\in\mathscr{K}^1_1(\mathscr{U})$，则

$$\begin{aligned}
&(\varphi_*(X)(\boldsymbol{\Theta}_1\otimes\boldsymbol{\Theta}_2)(X))(\boldsymbol{\omega}_1(x),\boldsymbol{u}_1(x),\boldsymbol{\omega}_2(x),\boldsymbol{u}_2(x))\\
&\quad=(\boldsymbol{\Theta}_1\otimes\boldsymbol{\Theta}_2)(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_1(x),\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_1(x),\\
&\qquad\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_2(x),\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_2(x))\\
&\quad=(\boldsymbol{\Theta}_1(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_1(x),\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_1(x)))(\boldsymbol{\Theta}_2(X)\\
&\qquad(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}_2(x),\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}_2(x)))\\
&\quad=((\varphi_*(X)\boldsymbol{\Theta}_1(X))(\boldsymbol{\omega}_1(x),\boldsymbol{u}_1(x)))(\varphi_*(X)\boldsymbol{\Theta}_2(X))\\
&\qquad\times(\boldsymbol{\omega}_2(x),\boldsymbol{u}_2(x)))\\
&\quad=(\varphi_*(X)\boldsymbol{\Theta}_1(X))\otimes(\varphi_*(X)\boldsymbol{\Theta}_2(X))(\boldsymbol{\omega}_1(x),\\
&\qquad\boldsymbol{u}_1(x),\boldsymbol{\omega}_2(x),\boldsymbol{u}_2(x)).
\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ 的任意性，得(46). 下面证(47).

$$\begin{aligned}
&(\varphi_*(X)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Omega})(X))(\boldsymbol{\omega}(x),\boldsymbol{u}(x))\\
&\quad=(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Omega})(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}(x),\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}(x))\\
&\quad=(\boldsymbol{U}(X)(\varphi^*(x)\boldsymbol{\omega}(x)))(\boldsymbol{\Omega}(X)(\varphi_*^{-1}(x)\boldsymbol{u}(x)))\\
&\quad=((\varphi_*(X)\boldsymbol{U}(X))(\boldsymbol{\omega}(x)))(\varphi^{-*}(X)\boldsymbol{\Omega}(X)(\boldsymbol{u}(x)))\\
&\quad=(\varphi_*(X)\boldsymbol{U}(X))\otimes(\varphi^{-*}(X)\boldsymbol{\Omega}(X))(\boldsymbol{\omega}(x),\boldsymbol{u}(x)).
\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u}$ 的任意性，上式给出(47). 用(47),(10)及(38), 即可得(48).

(iii) 利用 φ_* 的线性性质，并将(48)推广至更多个基元素的张量积,即得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}=\Theta^{A_1\cdots A_r}{}_{B_1\cdots B_s}&\left(\varphi_*\frac{\partial}{\partial X^{A_1}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\varphi_*\frac{\partial}{\partial X^{A_r}}\right)\\
&\otimes(\varphi^{-*}dX^{B_1})\otimes\cdots\otimes(\varphi^{-*}dX^{B_s})
\end{aligned}$$

$$= \Theta^{A_1\cdots A_r}{}_{B_1\cdots B_s}\left(x^{i_1}_{,A_1}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)\otimes\cdots\otimes\left(x^{i_r}_{,A_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)$$

$$\otimes(X^{B_1}_{,j_1}dx^{j_1})\otimes\cdots\otimes(X^{B_s}_{,j_s}dx^{j_s}).$$

和(49)比较，即得(50)。(50)式的形状和张量分量在坐标转换中的转换公式类似。 □

读者注意，顾名思义，推前的方向和区域映射的方向一致，而拉回的方向则相反。如果在 $\mathscr{U}$ 考虑一个新坐标系 $\{x^i\}_{\mathscr{U}}$，则 $\boldsymbol{\Theta}$ 的分量从坐标系 $\{X^A\}$ 到 $\{x^i\}_{\mathscr{U}}$ 的转换公式正是(50)。设想将 $\{x^i\}_{\mathscr{U}}$ 刻在 $\mathscr{U}$（物体）上，各点 $X\in\mathscr{U}$ 的坐标随映射 φ 而变为象点 $x\in\mathscr{W}$ 的坐标，从而得到 $\mathscr{W}$ 的坐标系 $\{x^i\}=\{x^i\}_{\mathscr{W}}$。坐标系 $\{x^i\}$ 好像随物体变形和运动。这就是**随体坐标系**的概念。这时，(50)式说，$\boldsymbol{\theta}=\varphi_*\boldsymbol{\Theta}$ 在 $\{x^i\}_{\mathscr{W}}$ 的分量等于 $\boldsymbol{\Theta}$ 在 $\{x^i\}_{\mathscr{U}}$ 的分量。换言之，$\boldsymbol{\Theta}$ 的推前 $\boldsymbol{\theta}$ 是 $\boldsymbol{\Theta}$ 在随体坐标系中分量数值保持不变而得来的新张量。古典的做法就是用随体坐标系来定义推前的。

§4 流，单参群和无穷小生成元

设 $\{x^i\}$ 是 $\mathbf{E}$ 的曲线坐标系。动点 x 沿曲线 C 运动的速度是速度向量

$$\dot{x}(t)=\dot{x}^i(t)\boldsymbol{g}_i(x). \tag{1}$$

4.1 定义 设 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathbf{E})$。光滑曲线

$$C: I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{E}: t\longmapsto x(t) \tag{2}$$

称为向量场 $\boldsymbol{u}$ 的**积分曲线**或**流线**，如果

$$\dot{x}(t)=\boldsymbol{u}(x(t)),\qquad \forall t\in I. \ \square \tag{3}$$

用坐标表示，(3)式是

$$\dot{x}^i(t)=u^i(x^j(t)). \tag{4}$$

就是说，$x^i(t)$ 是常微分方程组(4)的解，C 是这个方程组的积分曲线。

由于右端，即 $\boldsymbol{u}$，不显含 t，方程组(3)，或(4)，通常称为**自**

治系统. 向量场 u 完全代表该系统. 根据常微分方程的理论, 由于 u 是光滑向量场, 在初条件

$$x(0)=x_0 \text{ 或 } x^i(0)=x_0^i \tag{5}$$

下,方程组(3)或(4)有唯一,且光滑的解

$$x(t)=\varphi(x_0, t), \qquad \forall t\in I(x_0). \tag{6}$$

$I(x_0)$ 是依赖于初值 x_0 的解存在的最大区间. 但对 x_0 的足够小的邻域内的所有初始点,可以选定一个固定正数 a, 使得解区间为 $I=(-a, a)$. 下面不加证明地给出关于这方面的定理(可参阅常微分方程组的存在唯一性定理).

4.2 定理 设 $u\in\mathscr{X}(\mathbf{E})$. 对每点 x_0, 存在它的一个邻域 $\mathscr{U}_0$, 一个正实数 a 和一个光滑映射

$$\varphi:\mathscr{U}_0\times I\to\mathbf{E}:(x, t)\longmapsto\varphi(x, t),$$

其中 $I=(-a, a)$, 使得 $\varphi_x(\cdot)\equiv\varphi(x, \cdot):I\to\mathbf{E}$ 是方程组(3)过 x 的积分曲线. $\varphi(x,t)$ 称为系统(3)或向量场 u 的**流**(flow). □

我们也记 $\varphi_t(\cdot)\equiv\varphi(\cdot, t)$. 对于每点 $x\in\mathscr{U}_0$, φ_x 给出一条局部唯一的积分曲线, 而对于每 $t\in I$, $\varphi_t=\varphi|_{\mathscr{U}_0\times\{t\}}$ 将 $\mathscr{U}_0$ 映射为另一个开集. 开集 $\mathscr{U}_0$ 好像随着 t 的变化而流动. 更确切地, 我们有

4.3 定理 设 $u\in\mathscr{X}(\mathbf{E})$. 对每点 x_0, 存在 u 在点 x_0 的唯一的**流匣**(flow box) $(\mathscr{U}_0, a, \varphi)$, 其中

(i) $\mathscr{U}_0\subset\mathbf{E}$ 是含 x_0 的开集, $a\in\mathbf{R}$, $a>0$ 或 $a=+\infty$;

(ii) $\varphi:\mathscr{U}_0\times I\to\mathbf{E}$ 是光滑映射, 其中 $I=(-a, a)$;

(iii) 对每 $x\in\mathscr{U}_0$, $\varphi_x\equiv\varphi(x, \cdot):I\to\mathbf{E}:t\longmapsto\varphi(x, t)$ 是(3)过点 x 的积分曲线;

(iv) 对每 $t\in I$, $\varphi_t\equiv\varphi(\cdot, t):\mathscr{U}_0\to\mathbf{E}:x\longmapsto\varphi(x, t)$ 是区域映射. □

区域映射 φ_t 诱导的推前 $\varphi_{t*}(x)$ 将 $T_{\varphi_t(x)}\mathbf{E}$ 的一个向量 $\varphi_{t*}(x)u(x)$ 对应于 $u(x)\in T_x\mathbf{E}$. 因此, φ_{t*} 可以看成由向量场 u 所诱导的一种**平行性**.

4.4 定理 在 $t=0$ 附近, 映射 φ_t 具有以 t 为参数的(加法)

群的性质，即

(i) $\varphi_0 = id$ (因 $\varphi_0(x) = \varphi(x, 0) = x, \forall x \in \mathbf{E}$)，

(ii) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} = \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$，

(iii) $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ (因 $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = id$)。

φ_t 称为**局部单参变换群**.

证明 只需证 (ii)，即要证

$$\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, s+t) \tag{7}$$

成立. (7) 式右端满足方程及初条件

$$\frac{d}{ds}\varphi(x, s+t) = \frac{d}{d(s+t)}\varphi(x, s+t) = \boldsymbol{u}(\varphi(x, s+t)),$$

$$\varphi(x, s+t)|_{s=0} = \varphi(x, t);$$

(7) 式左端满足方程及初条件

$$\frac{d}{ds}\varphi(\varphi(x, t), s) = \boldsymbol{u}(\varphi(\varphi(x, t), s)$$

$$\varphi(\varphi(x, t), s)|_{s=0} = \varphi(\varphi(x, t), 0) = \varphi(x, t).$$

左、右两端满足相同的微分方程和相同的初条件，故 (7) 式成立.

4.5 定义 向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}(\mathbf{E})$ 称为**完备的** (complete)， 如果对每 $x_0 \in \mathbf{E}$，解的存在区间可延拓为$(-\infty, \infty)$.

4.6 推论 若 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}(\mathbf{E})$ 是完备向量场，则 $(\mathbf{E}, \infty, \varphi)$ 是一个流匣.

4.7 定义 设 $\forall t \in \mathbf{R}$，$\varphi_t: \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ 是区域映射(微分同胚)，满足

(i) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}, \forall s, t \in \mathbf{R}$，

(ii) $\varphi: \mathbf{E} \times \mathbf{R} \to \mathbf{E}: (x, t) \longmapsto \varphi_t(x)$ 是光滑映射，

则区域映射族 $\{\varphi_t | t \in \mathbf{R}\}$ 称为 $\mathbf{E}$ 的**单参变换群**.

4.8 定理 每一单参变换群 φ_t 按下述条件唯一确定一个向量场 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}(\mathbf{E})$：

$$\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))f = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[f(\varphi_{t+\Delta t}(x)) - f(\varphi_t(x))], \forall x \in \mathbf{E}; f \in \mathscr{F}(\mathbf{E}). \tag{8}$$

$\boldsymbol{u}$ 称为单参变换群 φ_t 的**无穷小生成元** (infinitesimal generator). 另

一方面，单参变换群 φ_t 是向量场 $\boldsymbol{u}$ 的流。

证明 因为 $\forall x \in \mathbf{E}$,

$$\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))(\alpha f+\beta g)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\alpha f(\varphi_{t+\Delta t}(x))$$

$$+\beta g(\varphi_{t+\Delta t}(x))-\alpha f(\varphi_t(x))-\beta g(\varphi_t(x))]$$

$$=\alpha\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[f(\varphi_{t+\Delta t}(x))-f(\varphi_t(x))]$$

$$+\beta\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[g(\varphi_{t+\Delta t}(x))-g(\varphi_t(x))]$$

$$=\alpha\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))f+\beta\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))g,$$

$$\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))(fg)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[fg(\varphi_{t+\Delta t}(x))-fg(\varphi_t(x))]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f(\varphi_{t+\Delta t}(x))-f(\varphi_t(x)))g(\varphi_{t+\Delta t}(x))$$

$$+f(\varphi_t(x))(g(\varphi_{t+\Delta t}(x))-g(\varphi_t(x)))]$$

$$=(\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))f)g(\varphi_t(x))+f(\varphi_t(x))(\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))g).$$

所以 $\boldsymbol{u}$ 是一个向量场. 唯一性是显然的. 将 (8) 式写成

$$\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))f=\frac{d}{dt}f(\varphi_t(x))=Df(\varphi_t(x);\dot{\varphi}_t(x))$$

$$=(df)(\varphi_t(x))(\dot{\varphi}_t(x))=\dot{\varphi}_t(x)f,$$

考虑到 f 的任意性，得

$$\dot{\varphi}(x,t)=\boldsymbol{u}(\varphi(x,t)),$$

故定理的最后结论成立.

4.9 引理 设 φ 和 ϕ 是向量场 $\boldsymbol{u}$ 的积分曲线，其定义域分别为含 $t=0$ 的开区间 I 和 J. 若 $\varphi(0)=\phi(0)$，则在 $I\cap J$ 上 $\varphi=\phi$.

证明 $I\cap J$ 是含 $t=0$ 的开区间. 设 $K=\{t\in I\cap J\mid \varphi(t)=\phi(t)\}$，则根据假设，$K$ 是含 $t=0$ 的非空集。今取 $s\in K$，则 $s\in I\cap J$（开集），从而存在 $\delta>0$，使得 $(s-\delta, s+\delta)\subset I\cap J$. 在这个区间上，$\varphi$ 和 ϕ 有定义. 定义两条新曲线 $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t+s)$，$\tilde{\phi}(t)=\phi(t+s)$，它们是满足相同初条件 $\tilde{\varphi}(0)=\varphi(s)=\phi(s)=\tilde{\phi}(0)$

的积分曲线．根据存在定理，在包含 $t=0$ 的某个区间内 $\bar{\varphi}=\bar{\phi}$．就是说在包含 s 的某个开区间内 $\varphi=\phi$，即 s 的某个邻域亦属于 K．因此 K 是 $I\cap J$ 的开子集．从上面可看到，K 的每一个点 s 均是 K 的聚点．下面证明，K 的每一个聚点 s 亦属于 K．因为存在 K 的点列 $s_p\to s$，而由 $\varphi(s_p)=\phi(s_p)$ 及 φ 和 ϕ 的连续性，当 $p\to+\infty$ 时，$\varphi(s_p)$ 和 $\phi(s_p)$ 的极限相等 $\varphi(s)=\phi(s)$，故 $s\in K$．因此，K 是 $I\cap J$ 的闭子集．由于 $I\cap J$ 连通，而 K 是 $I\cap J$ 的非空的，既开又闭的子集，故 $K=I\cap J$，从而在 $I\cap J$ 上 $\varphi=\phi$．

4.10 定理 若 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 完备，则存在唯一的，以 $\boldsymbol{u}$ 为无穷小生成元的单参变换群 $\{\varphi_t|t\in\mathbf{R}\}$．

证明 根据定理 4.2 和定义 4.5，$\boldsymbol{u}$ 的流是单参变换群．今设 $\{\varphi_t|t\in\mathbf{R}\}$ 和 $\{\phi_t|t\in\mathbf{R}\}$ 的无穷小生成元均为 $\boldsymbol{u}$．若任意取点 x 为初始点：$\varphi_0(x)=\varphi(x,0)=x=\phi_0(x)=\phi(x,0)$，则 $\varphi_x=\varphi(x,\cdot)$ 和 $\phi_x=\phi(x,\cdot)$ 就是两条积分曲线，它们的定义域均为 $(-\infty,\infty)$．根据引理 4.10，$\varphi=\phi$，$\forall t\in\mathbf{R}$; $x\in\mathbf{E}$．□

今后我们只考虑完备向量场．这时流和单参群是同义语．

§5 Lie 导 数

我们可以这样想像“流 φ”：在 $t=0$ 时，各点 x 在 $\mathscr{U}_0\subset\mathbf{E}$ 占有空间的位置，它们按方程 (4.3) 的规律运动．随着 t 的增加(或减少)，各点 x 改变自己的位置，每点沿自己的轨道运动．速度向量 $\dot{x}$ 就是生成 φ 的向量场 $\boldsymbol{u}$ 在该点的值 $\boldsymbol{u}(x)$．整个 $\mathscr{U}_0$ 好像在流动．不管 $t=0$ 时原来在什么位置的动点，只要流动到 x 点，就具有固定的速度 $\boldsymbol{u}(x)$．这就是自治系统的特点．设在 $\mathbf{E}$ 另有一给定张量场 $\boldsymbol{\Phi}$．现在问：在给定向量场 $\boldsymbol{u}$ 所诱导的**平行性**下（形象地说，在按上述规律运动的动点的眼里），$\boldsymbol{\Phi}$ (沿轨道)的变化率如何？

5.1 定义 设给定向量场 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$，它生成流 φ；又设有给定任意类型的张量场 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{X}^r_s(\mathrm{E})$，则

$$(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x)-\boldsymbol{\Phi}(x)],\quad \forall x\in \mathrm{E} \qquad (1)$$

定义一个和 $\boldsymbol{\Phi}$ 同型的张量场 $\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi}$，称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于向量场 $\boldsymbol{u}$ 的 **Lie 导数**[1)]. 这里 φ_{-t*} 是逆映射 φ_{-t} 的推前的同态扩张，而 $\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x)=\varphi_{-t*}(\varphi_t(x))\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))$. □

对于每一类型张量场，(1) 式定义了一个 **Lie 微分算子**

$$\mathscr{L}_u:\mathscr{X}^r_s(\mathrm{E})\to\mathscr{X}^r_s(\mathrm{E}):\boldsymbol{\Phi}\longmapsto\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi}, \qquad (2)$$

它依赖于 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$. 因此，我们又有

$$\mathscr{L}:\mathscr{X}(\mathrm{E})\to\mathfrak{L}:\boldsymbol{u}\longmapsto\mathscr{L}_u. \qquad (3)$$

这里$\mathfrak{L}$是 Lie 微分算子的全体.对不同类型的张量场，$\mathscr{L}_u$是不同的算子.最低阶的张量场是光滑函数 $\mathscr{F}(\mathrm{E})=\mathscr{X}^0_0(\mathrm{E})$. 如果我们记

$$\mathscr{L}^{\binom{0}{0}}_u:\mathscr{F}(\mathrm{E})\to\mathscr{F}(\mathrm{E}):f\longmapsto\mathscr{L}^{\binom{0}{0}}_u f, \qquad (4)$$

并认为 $\mathscr{L}^{\binom{0}{0}}_u$ 是基本 Lie 微分算子，则对任何其他类型张量场 $\mathscr{X}^r_s(\mathrm{E})$ 的 Lie 微分算子，记作 $\mathscr{L}^{\binom{r}{s}}_u$，可以认为是$\mathscr{L}^{\binom{0}{0}}_u$ 的同态扩张.像区域映射 φ 的导映射 φ_* 的所有同态扩张也用 φ_* 表示，为简单计，今后一切 Lie 微分算子仍用 $\mathscr{L}_u$ 表示. 行文将告诉我们，它是对那一类型张量场的同态扩张. 这样对某些叙述更方便. 其实，所有张量场空间的直和是一个**代数**，Lie 微分算子可以看作是从这个代数到自身的一个统一的算子. 但在这本书里，我们不准备作这最一般的讨论.

5.2 定理 对 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$和任何类型的张量场空间 $\mathscr{X}^r_s(\mathrm{E})$，(2) 式的 Lie 微分算子是线性的，并满足 Leibnitz 法则：

(i) $\mathscr{L}_u(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})=\alpha(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})+\beta(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Psi})$，

---

1) 这个定义是象征性的. $\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi}$ 应理解为在每点 $x\in\mathrm{E}$ 按下述方式定义的 $\binom{r}{s}$-重线性函数：

$$(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(x)(\omega_1(x),\cdots,\omega_r(x),u_1(x),\cdots,u_s(x))$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x)-\boldsymbol{\Phi}(x)](\omega_1(x),\cdots,\omega_r(x),u_1(x),\cdots,u_s(x))\right\},$$

$\forall\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathscr{X}^*(\mathrm{E});u_1,\cdots,u_s\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$. □

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{X}^r_s(\mathrm{E}), \tag{5}$$

(ii) $\mathscr{L}_{u}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}) = (\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\Phi}\otimes(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Psi}),$

$$\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{X}^r_s(\mathrm{E});\ \boldsymbol{\Psi} \in \mathscr{X}^{r'}_{s'}(\mathrm{E}). \tag{6}$$

特别地，对 $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{E})$，

(i)′ $\mathscr{L}_{u}(\alpha f + \beta g) = \alpha(\mathscr{L}_{u}f) + \beta(\mathscr{L}_{u}g),$ (7)

(ii)′ $\mathscr{L}_{u}(fg) = (\mathscr{L}_{u}f)g + f(\mathscr{L}_{u}g),$ (8)

以及

(ii)″ $\mathscr{L}_{u}(f\boldsymbol{\Phi}) = (\mathscr{L}_{u}f)\boldsymbol{\Phi} + f(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Phi}).$ (9)

证明 利用 $\boldsymbol{u}$ 生成的流的导映射的线性性质，我们有

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad (\mathscr{L}_{u}(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}))(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})(x) \\
&\quad - (\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi})(x)] \\
&= \alpha\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x) - \boldsymbol{\Phi}(x)] \\
&\quad + \beta\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Psi}(x) - \boldsymbol{\Psi}(x)] \\
&= \alpha(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Phi})(x) + \beta(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Psi})(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad \mathscr{L}_{u}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(x) \\
&\quad - (\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(x)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x))\otimes(\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Psi}(x)) + \boldsymbol{\Phi}(x)\otimes(\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Psi}(x) \\
&\quad - \boldsymbol{\Psi}(x))] = (\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Phi})(x)\otimes\boldsymbol{\Psi}(x) \\
&\quad + \boldsymbol{\Phi}(x)\otimes(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Psi})(x) = ((\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi} \\
&\quad + \boldsymbol{\Phi}\otimes(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Psi}))(x).
\end{aligned}$$

考虑到 x 的任意性，即得 (5) 和(6)。

5.3 推论 设 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$，$\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$ 是任意阶微分形式，则

$$\mathscr{L}_{u}(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{\Theta}) = (\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Omega})\wedge\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\mathscr{L}_{u}\boldsymbol{\Theta}). \tag{10}$$

5.4 定理 对于 $\mathscr{F}(\mathrm{E})$，在引进加法，数乘和换位子运算 $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathrm{E}))$：

$$(\alpha\mathscr{L}_{u} + \beta\mathscr{L}_{v})f = \alpha(\mathscr{L}_{u}f) + \beta(\mathscr{L}_{v}f), \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathscr{L}_u \circ \mathscr{L}_v - \mathscr{L}_v \circ \mathscr{L}_u) f \\
&\quad = \mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v f) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u f)
\end{aligned} \tag{12}
$$

之后，Lie 微分算子 (4) 的全体 $\mathfrak{L}$ 是一个 Lie代 数，它和 $\mathscr{X}(\mathbf{E})$，作为一个 Lie 代数，自然同构.

证明 由 (7) 和 (8)，$\mathscr{L}_u$ 实际上在每点 $x \in \mathbf{E}$ 是 $\mathscr{F}(x)$ 到 $\mathbb{R}$ 的导数：

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{L}_u f)(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\varphi_{-t*} f(x) - f(x)] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(\varphi_t(x)) - f(x)] \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\varphi_t(x)) = u^i(x) \partial_i|_x f \\
&= \boldsymbol{u}(x) f, \ \forall x \in \mathbf{E};\ f \in \mathscr{F}(\mathbf{E}).
\end{aligned} \tag{13}
$$

将这结果应用于 (11)，得

$$
\begin{aligned}
((\alpha \mathscr{L}_u + \beta \mathscr{L}_v) f)(x) &= \alpha (\mathscr{L}_u f)(x) + \beta (\mathscr{L}_v f)(x) \\
&= \alpha \boldsymbol{u}(x) f + \beta \boldsymbol{v}(x) f = (\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v})(x) f \\
&= (\mathscr{L}_{\alpha u + \beta v} f)(x).
\end{aligned} \tag{14}
$$

可见，Lie 微分算子对于加法和数乘是封闭的，而且结果是关于 $\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}$ 的 Lie 微分算子. 由此得结论：$\mathfrak{L}$ 是一个向量空间（容易验证满足向量空间运算的八个条件）. (3) 给出的映射 $\mathscr{L}$ 保线性运算，是一个从向量空间 $\mathscr{X}(\mathbf{E})$ 到向量空间 $\mathfrak{L}$ 的自然同构映射.

更进一步，$\mathfrak{L}$ 是一个 Lie 代数. 事实上，记

$$
[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] = \mathscr{L}_u \circ \mathscr{L}_v - \mathscr{L}_v \circ \mathscr{L}_u, \tag{15}
$$

则 $[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]$ 可作为 $\mathscr{L}_u$ 和 $\mathscr{L}_v$ 的 Lie 括弧积. 因为由（应用 (13) 于 (12)）

$$
\begin{aligned}
([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] f)(x) &= (\mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v f))(x) - (\mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u f))(x) \\
&= \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v} f) - \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u} f) = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x) f \\
&= (\mathscr{L}_{[u,v]} f)(x),
\end{aligned}
$$

可见，Lie 微分算子关于换位子运算也是封闭的，其结果是关于 Lie 括弧积 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ 的 Lie 微分算子. 下面证明它满足 Lie 括弧

积的三个条件.

(i) $[\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_u]f = \mathscr{L}_{[v,u]}f = [v, u]f = -[u, v]f$
$= -[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]f$;

(ii) $[\alpha\mathscr{L}_{u_1} + \beta\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v]f = [\mathscr{L}_{\alpha u_1+\beta u_2}, \mathscr{L}_v]f$
$= \mathscr{L}_{[\alpha u_1+\beta u_2, v]}f = [\alpha u_1 + \beta u_2, v]f$
$= \alpha[u_1, v]f + \beta[u_2, v]f = \alpha[\mathscr{L}_{u_1}, \mathscr{L}_v]f$
$+ \beta[\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v]f = (\alpha[\mathscr{L}_{u_1}, \mathscr{L}_v]$
$+ \beta[\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v])f$;

(iii) 利用(14)和(15)的结果，有

$$
\begin{aligned}
&[\mathscr{L}_u, [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]] + [\mathscr{L}_v, [\mathscr{L}_w, \mathscr{L}_u]] \\
&\quad + [\mathscr{L}_w, [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]] \\
&= [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_{[v,w]}] + [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_{[w,u]}] + [\mathscr{L}_w, \mathscr{L}_{[u,v]}] \\
&= \mathscr{L}_{[u,[v,w]]} + \mathscr{L}_{[v,[w,u]]} + \mathscr{L}_{[w,[u,v]]} \\
&= \mathscr{L}_{[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]} = \mathscr{L}_o = 0\mathscr{L}_o = 0.
\end{aligned}
$$

可见,映射 $\mathscr{L}$ 保 Lie 括弧积,从而定理的全部结论得到证明. □

为了证明上述定理对 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$ 也成立,需要先证明以下引理.

5.5 引理 设 $u \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$，生成流 φ. 任意给定 $x_0 \in \mathrm{E}$ 和 $f \in \mathscr{F}(\mathscr{U})$, $\mathscr{U}$ 是包含 x_0 的开集. 我们可以取足够小的 $\delta > 0$ 及 x_0 的邻域 $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$，使得 $\varphi(\mathscr{U}_0 \times (-\delta,\delta)) \subset \mathscr{U}$，并且存在定义在 $\mathscr{U}_0 \times (-\delta, \delta)$ 的 C^∞ 函数 $g(x, t)$，满足

$$
f(\varphi_t(x)) = f(x) + tg(x, t), \qquad u(x)f = g(x, 0). \tag{16}
$$

若记 $g_t(x) \equiv g(x, t)$，则 (16) 又可写成

$$
f\circ\varphi_t = f + tg_t, \qquad uf = g_0. \tag{17}
$$

证明 定理 4.3 保证存在 δ 和 $\mathscr{U}_0$，使得 $\varphi(\mathscr{U}_0 \times (-\delta, \delta)) \subset \mathscr{U}$. 函数 $r(x, t) = f(\varphi_t(x)) - f(x)$ 在 $\mathscr{U}_0 \times (-\delta, \delta)$ 上有定义,且 $r(x,0) = 0$. 记 $\dot{r}(x, t) = \dfrac{\partial r(x, t)}{\partial t}$，并在 $\mathscr{U}_0 \times (-\delta, \delta)$ 上定义函数

$$
g(x, t) = \int_0^1 \dot{r}(x, ts)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \dot{r}(x, \tau)d\tau
$$

$$= \frac{1}{t}[r(x, t) - r(x, 0)]$$

$$= \frac{1}{t}[f(\varphi_t(x)) - f(x)].$$

此即 $(16)_1$ 式。当 $t \to 0$，上式又给出 $(16)_2$:

$$g(x, 0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\varphi_t(x)) - f(x)] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\varphi_t(x))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x \dot{x}^i(0) = \boldsymbol{u}(x)f.$$

5.6 引理 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(\mathbf{E})$，则

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]. \tag{18}$$

证明 设 $\boldsymbol{u}$ 生成流 φ。从定义 (1) 出发，应用 (3.3)，(17) 和 (4.8)，$\forall x \in \mathbf{E}$; $f \in \mathscr{F}(\mathbf{E})$，依次有

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})(x)f = \left\{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi_{-t*}\boldsymbol{v}(x) - \boldsymbol{v}(x)]\right\} f$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\varphi_{-t*}\boldsymbol{v}(x)f - \boldsymbol{v}(x)f]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\boldsymbol{v}(\varphi_t(x))(f\circ\varphi_{-t}) - \boldsymbol{v}(x)f]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\boldsymbol{v}(\varphi_t(x))(f - tg_{-t}) - \boldsymbol{v}(x)f]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\boldsymbol{v}(\varphi_t(x))f - \boldsymbol{v}(x)f] - \lim_{t\to 0}\boldsymbol{v}(\varphi_t(x))g_{-t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\boldsymbol{v}f(\varphi_t(x)) - \boldsymbol{v}f(x)] - \lim_{t\to 0}\boldsymbol{v}g_{-t}(\varphi_t(x))$$

$$= \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}f(\varphi_t(x))\big|_{t=0} - \boldsymbol{v}(x)g_0$$

$$= \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{v}f) - \boldsymbol{v}(x)(\boldsymbol{u}f) = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](x)f.$$

从而(18)得证。□

其实，(13) 式也就定义了一个函数

$$\boldsymbol{u}f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f\circ\varphi_t - f).$$

利用这个结果，我们还可以给出上述引理的另一个不必用到引理 5.5 的较利索的证明，如下

$$(\mathscr{L}_u v)(x)f=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[v(\varphi_t(x))(f\circ\varphi_{-t})-v(x)f]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[v(f\circ\varphi_{-t})(\varphi_t(x))-vf(x)]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{v(f\circ\varphi_{-t})(\varphi_t(x))-vf(\varphi_t(x))}{t}\right.$$

$$\left.+\frac{vf(\varphi_t(x))-vf(x)}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[-v(\varphi_t(x))\frac{f\circ\varphi_{-t}-f}{-t}\right.$$

$$\left.+\frac{vf(\varphi_t(x))-vf(x)}{t}\right]$$

$$=-v(x)(uf)+u(x)(vf)=[u,v](x)f.$$

5.7 定理 对于 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$，在引进 Lie 微分算子的加法，数乘和换位子运算 ($\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $u, v, w\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$):

$$(\alpha\mathscr{L}_u+\beta\mathscr{L}_v)w=\alpha(\mathscr{L}_u w)+\beta(\mathscr{L}_v w),\tag{19}$$

$$[\mathscr{L}_u,\mathscr{L}_v]w=\mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v w)-\mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u w),\tag{20}$$

之后，定理 5.4 的结论仍成立.

证明 定理 5.4 已证明映射 (3) 是双射. 故只需证，对于 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$，$\alpha\mathscr{L}_u+\beta\mathscr{L}_v$ 和 $[\mathscr{L}_u,\mathscr{L}_v]$ 也是 Lie 微分算子，且后者还满足 Lie 括弧积的三个条件.将 (18) 分别代入 (19) 和 (20) 的右端，得

$$(\alpha\mathscr{L}_u+\beta\mathscr{L}_v)w=\alpha[u,w]+\beta[v,w]$$

$$=[\alpha u+\beta v,w]=\mathscr{L}_{\alpha u+\beta v}w,$$

$$[\mathscr{L}_u,\mathscr{L}_v]w=[u,[v,w]]-[v,[u,w]]$$

$$=[[u,v],w]=\mathscr{L}_{[u,v]}w.\tag{21}$$

可见，对于 $\mathscr{X}(\mathrm{E})$，$\alpha\mathscr{L}_u+\beta\mathscr{L}_v=\mathscr{L}_{\alpha u+\beta v}\in\mathfrak{L}$ 和 $[\mathscr{L}_u,\mathscr{L}_v]=\mathscr{L}_{[u,v]}\in\mathfrak{L}$，而且后者是 $\mathscr{L}_u$ 和 $\mathscr{L}_v$ 的 Lie 括弧积. 事实上，

(i) $[\mathscr{L}_v,\mathscr{L}_u]w=[[v,u],w]=-[[u,v],w]$

$$= -[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]w;$$

(ii) $[\alpha\mathscr{L}_{u_1} + \beta\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v]w = [\mathscr{L}_{\alpha u_1+\beta u_2}, \mathscr{L}_v]w$

$$= \mathscr{L}_{[\alpha u_1+\beta u_2, v]}w = [[\alpha u_1 + \beta u_2, v], w]$$
$$= [\alpha[u_1, v] + \beta[u_2, v], w] = \alpha[[u_1, v], w]$$
$$+ \beta[[u_2, v], w] = \alpha[\mathscr{L}_{u_1}, \mathscr{L}_v]w$$
$$+ \beta[\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v]w = (\alpha[\mathscr{L}_{u_1}, \mathscr{L}_v]$$
$$+ \beta[\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v])w;$$

(iii) 因 $\forall z \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$，有

$$[\mathscr{L}_u, [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]]z = \mathscr{L}_u([\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]z)$$
$$- [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w](\mathscr{L}_u z) = \mathscr{L}_u(\mathscr{L}_{[v,w]}z)$$
$$- \mathscr{L}_{[v,w]}(\mathscr{L}_u z) = \mathscr{L}_{[u,[v,w]]}z,$$

故

$$([\mathscr{L}_u, [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]] + [\mathscr{L}_v, [\mathscr{L}_w, \mathscr{L}_u]]$$
$$+ [\mathscr{L}_w, [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]])z = \mathscr{L}_{[u,[v,w]]}z$$
$$+ \mathscr{L}_{[v,[w,u]]}z + \mathscr{L}_{[w,[u,v]]}z$$
$$= [[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]], z]$$
$$= [o, z] = o. \square$$

5.8 定理 设 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{X}_r(\mathrm{E})$ 是 r 阶协变张量场，$u \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$，则

$$(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(u_1, \cdots, u_r) = u(\boldsymbol{\Phi}(u_1, \cdots, u_r))$$
$$- \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\Phi}(u_1, \cdots, [u, u_i], \cdots, u_r),$$
$$\forall u_1, \cdots, u_r \in \mathscr{X}(\mathrm{E}). \tag{22}$$

证明 为简单计，仅对 $r = 2$ 证明。$\forall x \in \mathrm{E}$，

$$(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(x)(u_1(x), u_2(x)) = \left\{\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x)\right.$$
$$\left. - \boldsymbol{\Phi}(x)]\right\}(u_1(x), u_2(x))$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\varphi_{-t*}\boldsymbol{\Phi}(x))(u_1(x), u_2(x))$$
$$- \boldsymbol{\Phi}(x)(u_1(x), u_2(x))]$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\varphi_{t*}\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x)), \varphi_{t*}\boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x))) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{u}_1(x), \boldsymbol{u}_2(x))] \\
&= \lim_{t\to 0} \left\{\frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\varphi_{t*}\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x)), \varphi_{t*}\boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x))) \right. \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x)), \boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x)))] \\
&\qquad + \frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x)), \boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x))) \\
&\qquad \left. - \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{u}_1(x), \boldsymbol{u}_2(x))]\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \left\{\left[\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x)) \left(\frac{\varphi_{t*}\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x)) - \boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x))}{t},\right.\right.\right. \\
&\quad \left. \boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x))\right) + \boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x)) \left(\varphi_{t*}\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x))\right. \\
&\quad \left.\left. \times \frac{\varphi_{t*}\boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x)) - \boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x))}{t}\right)\right] \\
&\qquad \left. + \frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)(\varphi_t(x)) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)(x)]\right\} \\
&= \lim_{t\to 0} \left\{-\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x)) \left(\varphi_{t*}(x) \frac{\varphi_{-t*}\boldsymbol{u}_1(x) - \boldsymbol{u}_1(x)}{t},\right.\right. \\
&\quad \left. \boldsymbol{u}_2(\varphi_t(x))\right) - \boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x)) \left(\varphi_{t*}\boldsymbol{u}_1(\varphi_t(x)), \varphi_{t*}(x)\right. \\
&\quad \left. \times \frac{\varphi_{-t*}\boldsymbol{u}_2(x) - \boldsymbol{u}_2(x)}{t}\right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)(\varphi_t(x)) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)(x)]\right\} \\
&= -\boldsymbol{\Phi}(x)((\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_1)(x), \boldsymbol{u}_2(x)) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{u}_1(x), (\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}_2)(x)) \\
&\quad + (\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)))(x) = \boldsymbol{u}(x)(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x)([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1](x), \boldsymbol{u}_2(x)) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{u}_1(x), [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2](x)).
\end{aligned}
$$

转为场方程，就有

$$(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(u_1, u_2) = u(\boldsymbol{\Phi}(u_1, u_2)) - \boldsymbol{\Phi}([u, u_1], u_2) - \boldsymbol{\Phi}(u_1, [u, u_2]).$$

进一步更可证明

5.9 定理 设 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{X}^r_s(\mathrm{E})$, $u \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_u(\boldsymbol{\Phi}(\omega_1, \cdots, \omega_r, u_1, \cdots, u_s)) \\
&= (\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(\omega_1, \cdots, \omega_r, u_1, \cdots, u_s) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\Phi}(\omega_1, \cdots, \mathscr{L}_u\omega_i, \cdots, \omega_r, u_1, \cdots, u_s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{\Phi}(\omega_1, \cdots, \omega_r, u_1, \cdots, \mathscr{L}_u u_j, \cdots, u_s), \\
&\forall \omega_1, \cdots, \omega_r \in \mathscr{X}^*(\mathrm{E});\ u_1, \cdots, u_s \in \mathscr{X}(\mathrm{E}). \qquad (23)
\end{aligned}$$

证明 在上一定理证明的基础上，只需对 $r = 2$, $s = 0$ 情形进行证明.

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{L}_u\boldsymbol{\Phi})(x)(\omega_1(x), \omega_2(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \\
&\quad \times [\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\varphi^*_{-t}\omega_1(\varphi_t(x)), \varphi^*_{-t}\omega_2(\varphi_t(x))) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x)(\omega_1(x), \omega_2(x))] \\
&= \lim_{t\to 0} \Big\{\frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\varphi^*_{-t}\omega_1(\varphi_t(x)), \varphi^*_{-t}\omega_2(\varphi_t(x))) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\omega_1(\varphi_t(x)), \omega_2(\varphi_t(x)))] \\
&\quad + \frac{1}{t} [\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))(\omega_1(\varphi_t(x)), \omega_2(\varphi_t(x))) \\
&\quad - \boldsymbol{\Phi}(x)(\omega_1(x), \omega_2(x))]\Big\} \\
&= \lim_{t\to 0} \Big\{\Big[\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x)) \Big(\frac{\varphi^*_{-t}\omega_1(\varphi_t(x)) - \omega_1(\varphi_t(x))}{t}, \\
&\quad \omega_2(\varphi_t(x))\Big) + \boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x)) \Big(\varphi^*_{-t}\omega_1(\varphi_t(x)), \\
&\quad \frac{\varphi^*_{-t}\omega_2(\varphi_t(x)) - \omega_2(\varphi_t(x))}{t}\Big)\Big] + \frac{1}{t} \\
&\quad \times [\boldsymbol{\Phi}(\omega_1, \omega_2)(\varphi_t(x)) - \boldsymbol{\Phi}(\omega_1, \omega_2)(x)]\Big\}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\left[-\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))\left(\varphi^*_{-t}(x)\ \frac{\varphi_t^*\boldsymbol{\omega}_1(x)-\boldsymbol{\omega}_1(x)}{t},\right.\right.\right.$$

$$\left.\boldsymbol{\omega}_2(\varphi_t(x))-\boldsymbol{\Phi}(\varphi_t(x))\right)\left(\varphi^*_{-t}\boldsymbol{\omega}_1(\varphi_t(x)),\varphi^*_{-t}(x)\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\varphi_t^*\boldsymbol{\omega}_2(x)-\boldsymbol{\omega}_2(x)}{t}\right)\right]+\frac{1}{t}$$

$$\left.\times\left[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)(\varphi_t(x))-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)(x)\right]\right\}$$

$$=\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2))(x)-\boldsymbol{\Phi}(x)(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\omega}_1(x),\boldsymbol{\omega}_2(x))$$
$$-\boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{\omega}_1(x),\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\omega}_2(x)).$$

转为场方程,并移项,就有

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2))=(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)+\boldsymbol{\Phi}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)$$
$$+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}_1,\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\omega}_2).$$

利用这结果及上一个定理，就可得 (23)。

5.10 引理 设 $\boldsymbol{u}=u^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$，$\boldsymbol{\omega}=\omega_i dx^i\in\mathscr{X}^*(\mathrm{E})$，则有

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\frac{\partial}{\partial x^i}=-u^j_{,i}\frac{\partial}{\partial x^j},\tag{24}$$

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}dx^i=u^i_{,j}dx^j,\tag{25}$$

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{u}\omega_i)dx^i+\omega_i u^i_{,j}dx^j=(\omega_{j,i}u^i+\omega_i u^i_{,j})dx^j.\tag{26}$$

证明 利用 (18) 和 $(2.10)_2$，有

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\frac{\partial}{\partial x^i}=\left[\boldsymbol{u},\frac{\partial}{\partial x^i}\right]=\left[u^j\frac{\partial}{\partial x^j},\ \delta^k_i\frac{\partial}{\partial x^k}\right]$$
$$=-u^j_{,k}\delta^k_i\frac{\partial}{\partial x^j}=-u^j_{,i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

$\forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$，利用(22)，(1.34) 和 (1.17)，又有

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}dx^i)(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}(dx^i(\boldsymbol{v}))-dx^i([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])$$
$$=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}x^i)-[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]x^i=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}x^i)=\boldsymbol{v}u^i$$
$$=du^i(\boldsymbol{v})=u^i_{,j}dx^j(\boldsymbol{v}).$$

由 $\boldsymbol{v}$ 的任意性，得 (25)。利用 (8) 和 (25)，又有

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\omega}=\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\omega_i dx^i)=(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\omega_i)dx^i+\omega_i(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}dx^i)$$

$$= (u\omega_i)dx^i + \omega_i u^i_{,j} dx^j.$$

5.11 定理 对于 $\mathscr{X}^*(E)$，在引进 Lie 微分算子的加法，数乘和换位子运算 $(\forall \alpha, \beta \in R; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}(E); \boldsymbol{\omega} \in \mathscr{X}^*(E))$:

$$(\alpha \mathscr{L}_u + \beta \mathscr{L}_v)\boldsymbol{\omega} = \alpha(\mathscr{L}_u \boldsymbol{\omega}) + \beta(\mathscr{L}_v \boldsymbol{\omega}), \tag{27}$$

$$[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]\omega = \mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v \boldsymbol{\omega}) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u \boldsymbol{\omega}), \tag{28}$$

之后，定理 5.4 的结论仍成立。

证明 类似于定理 5.7. 只需证，对于 $\mathscr{X}^*(E)$, $\alpha\mathscr{L}_u+\beta\mathscr{L}_v$ 和 $[\mathscr{L}_u,\mathscr{L}_v]$ 也是 Lie 微分算子，且后者还满足 Lie 括弧积的三个条件. 为此，需要利用定理 5.8 对于 $r=1$ 的情形 $(\forall \boldsymbol{w} \in \mathscr{X}(E))$:

$$(\mathscr{L}_u \omega)(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}(\omega(\boldsymbol{w})) - \omega([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]).$$

反复利用此式和 Lie 微分算子的线性性质，有

$$\begin{aligned}((\alpha\mathscr{L}_u + \beta\mathscr{L}_v)\omega)(\boldsymbol{w}) &= \alpha(\mathscr{L}_u\omega)(\boldsymbol{w}) + \beta(\mathscr{L}_v\omega)(\boldsymbol{w}) \\ &= \alpha\{\boldsymbol{u}(\omega(\boldsymbol{w})) - \omega([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}])\} + \beta\{\boldsymbol{v}(\omega(\boldsymbol{w})) \\ &\quad - \omega([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}])\} = (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})(\omega(\boldsymbol{w})) \\ &\quad - \omega([\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]) = (\mathscr{L}_{\alpha u+\beta v}\omega)(\boldsymbol{w}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]\omega)(\boldsymbol{w}) &= (\mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v\omega))(\boldsymbol{w}) \\ &\quad - (\mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u\omega))(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}((\mathscr{L}_v\omega)(\boldsymbol{w})) \\ &\quad - (\mathscr{L}_v\omega)([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]) - \boldsymbol{v}((\mathscr{L}_u\omega)(\boldsymbol{w})) \\ &\quad + (\mathscr{L}_u\omega)([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\omega(\boldsymbol{w})) \\ &\quad - \omega([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}])) - \boldsymbol{v}(\omega([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}])) \\ &\quad + \omega([\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]]) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\omega(\boldsymbol{w})) - \omega([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}])) \\ &\quad + \boldsymbol{u}(\omega([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}])) - \omega([\boldsymbol{u}, [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]]) \\ &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(\omega(\boldsymbol{w}))) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\omega(\boldsymbol{w}))) \\ &\quad + \omega([\boldsymbol{v}, [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]]) + \omega([\boldsymbol{u}, [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]]) \\ &= [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](\omega(\boldsymbol{w})) - \omega([[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}], \boldsymbol{w}]) \\ &= (\mathscr{L}_{[u,v]}\omega)(\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{w}$ 的任意性，得，对于 $\mathscr{X}^*(E)$, $\alpha\mathscr{L}_u + \beta\mathscr{L}_v = \mathscr{L}_{\alpha u+\beta v} \in \mathfrak{L}$, $[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] = \mathscr{L}_{[u,v]} \in \mathfrak{L}$, 而且后者是 $\mathscr{L}_u$ 和 $\mathscr{L}_v$ 的 Lie 括弧积，因

(i) $[\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_u]\omega = \mathscr{L}_{[v,u]}\omega = \mathscr{L}_{-[u,v]}\omega = -\mathscr{L}_{[u,v]}\omega$
$= -[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]\omega$,

(ii) $[\alpha\mathscr{L}_{u_1} + \beta\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v]\omega = [\mathscr{L}_{\alpha u_1+\beta u_2}, \mathscr{L}_v]\omega$
$= \mathscr{L}_{[\alpha u_1+\beta u_2, v]}\omega = \mathscr{L}_{\alpha[u_1,v]+\beta[u_2,v]}\omega = (\alpha\mathscr{L}_{[u_1,v]}$
$+ \beta\mathscr{L}_{[u_2,v]})\omega = (\alpha[\mathscr{L}_{u_1}, \mathscr{L}_v]$
$+ \beta[\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v])\omega$,

(iii) $([\mathscr{L}_u, [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]] + [\mathscr{L}_v, [\mathscr{L}_w, \mathscr{L}_u]]$
$+ [\mathscr{L}_w, [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]])\omega = \mathscr{L}_u([\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w]\omega)$
$- [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_w](\mathscr{L}_u\omega) + \mathscr{L}_v([\mathscr{L}_w, \mathscr{L}_u]\omega)$
$- [\mathscr{L}_w, \mathscr{L}_u](\mathscr{L}_v\omega) + \mathscr{L}_w([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]\omega)$
$- [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v](\mathscr{L}_w\omega) = (\mathscr{L}_{[u,[v,w]]}$
$+ \mathscr{L}_{[v,[w,u]]} + \mathscr{L}_{[w,[u,v]]})\omega$
$= \mathscr{L}_{[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]}\omega = \mathscr{L}_o\omega = o$.

5.12 定理 对于任何 $\mathscr{K}^r_s(E)$，在引进 Lie 微分算子的加法,数乘和换位子运算($\forall\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; $u, v \in \mathscr{K}(E)$; $\Phi \in \mathscr{K}^r_s(E)$):

$$(\alpha\mathscr{L}_u + \beta\mathscr{L}_v)\Phi = \alpha(\mathscr{L}_u\Phi) + \beta(\mathscr{L}_v\Phi), \tag{29}$$

$$[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]\Phi = \mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v\Phi) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u\Phi), \tag{30}$$

之后，定理 5.4 的结论仍成立.

证明 为简单计，根据 Lie 微分算子的线性性质和 (8)，只需对 $\binom{1}{1}$ 型简单张量场 $w\otimes\omega$ 证明 $\alpha\mathscr{L}_u + \beta\mathscr{L}_v$ 和 $[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]$ 也是 Lie 微分算子，且后者还满足 Lie 括弧积的三个条件. 为此，利用 Leibnitz 法则和定理 5.7 及 5.11，有

$$\begin{aligned}(\alpha\mathscr{L}_u + \beta\mathscr{L}_v)(w\otimes\omega) &= \alpha\mathscr{L}_u(w\otimes\omega) + \beta\mathscr{L}_v(w\otimes\omega)\\ &= (\alpha\mathscr{L}_u w + \beta\mathscr{L}_v w)\otimes\omega + w\otimes(\alpha\mathscr{L}_u\omega + \beta\mathscr{L}_v\omega)\\ &= (\mathscr{L}_{\alpha u+\beta v}w)\otimes\omega + w\otimes(\mathscr{L}_{\alpha u+\beta v}\omega)\\ &= \mathscr{L}_{\alpha u+\beta v}(w\otimes\omega),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v](w\otimes\omega) &= \mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v(w\otimes\omega)) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u(w\otimes\omega))\\ &= \mathscr{L}_u((\mathscr{L}_v w)\otimes\omega + w\otimes(\mathscr{L}_v\omega))\\ &\quad - \mathscr{L}_v((\mathscr{L}_u w)\otimes\omega + w\otimes(\mathscr{L}_u\omega))\end{aligned}$$

$$= (\mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v w) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u w))\otimes\omega$$

$$+ w\otimes(\mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v\omega) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u\omega))$$

$$= (\mathscr{L}_{[u,v]}w)\otimes\omega + w\otimes(\mathscr{L}_{[u,v]}\omega)$$

$$= \mathscr{L}_{[u,v]}(w\otimes\omega).$$

可见，对于 $\mathscr{H}^r_s(E)$，$\alpha\mathscr{L}_u + \beta\mathscr{L}_v = \mathscr{L}_{\alpha u+\beta v} \in \mathfrak{L}$，$[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] = \mathscr{L}_{[u,v]} \in \mathfrak{L}$，而且后者是 $\mathscr{L}_u$ 和 $\mathscr{L}_v$ 的 Lie 括弧积，因为

(i) $[\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_u](w\otimes\omega) = \mathscr{L}_{[v,u]}(w\otimes\omega)$

$$= -\mathscr{L}_{[u,v]}(w\otimes\omega) = -[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v](w\otimes\omega),$$

(ii) $[\alpha\mathscr{L}_{u_1} + \beta\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v](w\otimes\omega)$

$$= [\mathscr{L}_{\alpha u_1+\beta u_2}, \mathscr{L}_v](w\otimes\omega)$$

$$= \mathscr{L}_{[\alpha u_1+\beta u_2, v]}(w\otimes\omega) = \mathscr{L}_{\alpha[u_1,v]+\beta[u_2,v]}(w\otimes\omega)$$

$$= (\alpha\mathscr{L}_{[u_1,v]} + \beta\mathscr{L}_{[u_2,v]})(w\otimes\omega) = (\alpha[\mathscr{L}_{u_1}, \mathscr{L}_v]$$

$$+ \beta[\mathscr{L}_{u_2}, \mathscr{L}_v])(w\otimes\omega),$$

(iii) $([\mathscr{L}_u, [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_z]] + [\mathscr{L}_v, [\mathscr{L}_z, \mathscr{L}_u]]$

$$+ [\mathscr{L}_z, [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]])(w\otimes\omega)$$

$$= \mathscr{L}_u([\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_z](w\otimes\omega)) - [\mathscr{L}_v, \mathscr{L}_z](\mathscr{L}_u(w\otimes\omega))$$

$$+ \mathscr{L}_v([\mathscr{L}_z, \mathscr{L}_u](w\otimes\omega))$$

$$- [\mathscr{L}_z, \mathscr{L}_u](\mathscr{L}_v(w\otimes\omega))$$

$$+ \mathscr{L}_z([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v](w\otimes\omega))$$

$$- [\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v](\mathscr{L}_z(w\otimes\omega))$$

$$= (\mathscr{L}_{[u,[v,z]]} + \mathscr{L}_{[v,[z,u]]} + \mathscr{L}_{[z,[u,v]]})(w\otimes\omega)$$

$$= \mathscr{L}_{[u,[v,z]]+[v,[z,u]]+[z,[u,v]]}(w\otimes\omega)$$

$$= \mathscr{L}_o(w\otimes\omega) = o.$$

5.13 定理 在曲线坐标系 $\{x^i\}$ 里，

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots$$

$$\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s} \in \mathscr{H}^r_s(E)$$

关于 $u = u^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathscr{X}(E)$ 的 Lie 导数 $\mathscr{L}_u\Phi$ 的分量表达式为

$$(\mathscr{L}_u\Phi)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,i}u^i - \sum_{p=1}^{r} u^{i_p}_{,i}\Phi^{i_1\cdots i_{p-1}ii_{p+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$$

$$+ \sum_{q=1}^{s} u^i_{,j_q}\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{q-1}ij_{q+1}\cdots j_s}. \tag{31}$$

证明 利用张量分量的定义，(23—25)，即得

$$\begin{aligned}
(\mathscr{L}_u\Phi)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} &= (\mathscr{L}_u\Phi)\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&= u\left(\Phi\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\right)\\
&\quad - \sum_{p=1}^{r}\Phi\left(dx^{i_1},\cdots,\mathscr{L}_u dx^{i_p},\cdots,dx^{i_r},\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) - \sum_{q=1}^{s}\Phi\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r},\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\mathscr{L}_u\frac{\partial}{\partial x^{j_q}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&= u\left(\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\right) - \sum_{p=1}^{r} u^{i_p}_{,i}\Phi\\
&\quad \times\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i},\cdots,dx^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&\quad + \sum_{q=1}^{s} u^i_{,j_q}\Phi\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial}{\partial x^{i}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) = u^i\partial_i\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad - \sum_{p=1}^{r} u^{i_p}_{,i}\Phi^{i_1\cdots i\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad + \sum_{q=1}^{s} u^i_{,j_q}\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots i\cdots j_s}.
\end{aligned}$$

§6 里积和外微分

6.1 定义 设 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$. 定义映射[1]

$$\boldsymbol{i}_u:\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_{r-1}(\mathscr{V}):\boldsymbol{\Phi}\longmapsto\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Phi},$$

满足

$$\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1}),\forall\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1}\in\mathscr{V}. \tag{1}$$

$\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Phi}$ 称为向量 $\boldsymbol{u}$ 和协变张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**里积**（interior product，多数中文资料译为**内积**，但这和 inner product 的译名相重. Arnold 称之为**内微分**（interior derivative），但 $\boldsymbol{i}_u$ 不是微分算子）.

6.2 定理 里积有两个线性性质（$\forall\alpha,\beta\in\mathrm{R}$; $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$; $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$）:

$$\boldsymbol{i}_u(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})=\alpha\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Psi}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{i}_{\alpha u+\beta v}=\alpha\boldsymbol{i}_u+\beta\boldsymbol{i}_v. \tag{3}$$

证明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_u(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})&=(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})\\&=\alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})+\beta\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})\\&=(\alpha\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_{\alpha u+\beta v}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})&=\boldsymbol{\Phi}(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})\\&=\alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})+\beta\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1})\\&=(\alpha\boldsymbol{i}_u+\beta\boldsymbol{i}_v)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_{r-1}).\end{aligned}$$

6.3 引理 设 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$, $\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathscr{V}^*$, 则

$$\boldsymbol{i}_u(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r)=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\boldsymbol{i}_u\omega_j(\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_j\wedge\cdots\wedge\omega_r). \tag{4}$$

证明 记 $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}$, 按定义, $\forall\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_r\in\mathscr{V}$, 有（按行列式第 1 列展开）:

$$\boldsymbol{i}_{u_1}(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r)(\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_r)=(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r)(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r)$$

---

1) 也有文献用 $\boldsymbol{u}\lrcorner\boldsymbol{\Phi}$ 表示 $\boldsymbol{i}_u\boldsymbol{\Phi}$ 的. 这时, $\boldsymbol{u}\lrcorner\omega=\omega(\boldsymbol{u})$, $\forall\omega\in\mathscr{V}^*$.

$$=\begin{vmatrix}\omega_1(u_1)\cdots\omega_1(u_r)\\ \vdots \\ \omega_r(u_1)\cdots\omega_r(u_r)\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{r}$$

$$\times(-1)^{j+1}\omega_j(u_1)(\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_j\wedge\cdots\wedge\omega_r)(u_2,\cdots,u_r).$$

考虑到 $\omega_j(u_1)=i_{u_1}\omega_j$ 及 $u_2,\cdots,u_r$ 的任意性，即得 (4)。 □

若 $\Phi\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，则 $i_u\Phi\in\Lambda_{r-1}(\mathscr{V})$。

6.4 定理 设 $u\in\mathscr{V}$，$\Phi\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，$\Psi\in\Lambda_s(\mathscr{V})$，则

$$i_u(\Phi\wedge\Psi)=i_u\Phi\wedge\Psi+(-1)^r\Phi\wedge i_u\Psi. \tag{5}$$

这性质称为里积的**反导性** (anti-derivative)。

证明 由于里积映射的线性性质 (2)，可以只对简单外形式证明。设 $\Phi=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r$，$\Psi=\omega_1'\wedge\cdots\wedge\omega_s'$。由引理 6.3，得

$$\begin{aligned}i_u(\Phi\wedge\Psi)&=i_u(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r\wedge\omega_1'\wedge\cdots\wedge\omega_s')\\&=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}i_u\omega_j(\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_j\wedge\cdots\wedge\omega_r\wedge\Psi)\\&\quad+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{r+j+1}i_u\omega_j'(\Phi\wedge\omega_1'\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_j'\wedge\cdots\wedge\omega_s')\\&=\Big(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}i_u\omega_j(\omega_1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_j\wedge\cdots\wedge\omega_r)\Big)\wedge\Psi\\&\quad+(-1)^r\Phi\wedge\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}i_u\omega_j'(\omega_1'\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_j'\\&\quad\wedge\cdots\wedge\omega_s')=i_u\Phi\wedge\Psi+(-1)^r\Phi\wedge i_u\Psi.\end{aligned}$$ □

如果在每点 $x\in E$ 定义 $u\in\mathscr{X}(E)$ 和 $\Phi\in\mathscr{X}_r(E)$ 在点 x 的值 $u(x)\in T_xE$ 和 $\Phi(x)\in\mathscr{T}_r(T_xE)$ 的里积 $i_{u(x)}\Phi(x)$，我们就得 $i_u\Phi\in\mathscr{X}_{r-1}(E)$，而 i_u 就是一个里积映射场。

6.5 定理 设 $u,v\in\mathscr{X}(E)$，则对任意协变张量场，有

$$i_{[u,v]}=\mathscr{L}_u i_v-i_v\mathscr{L}_u. \tag{6}$$

证明 $\forall u_1,\cdots,u_{r-1}\in\mathscr{X}(E)$；$\Phi\in\mathscr{X}_r(E)$，两次应用 (5.22) 计算

$$(\mathscr{L}_u i_v\Phi)(u_1,\cdots,u_{r-1})=\mathscr{L}_u(i_v\Phi(u_1,\cdots,u_{r-1}))$$

$$- \sum_{j=1}^{r-1} i_v \Phi(u_1, \cdots, [u, u_j], \cdots, u_{r-1})$$

$$= \mathscr{L}_u(\Phi(v, u_1, \cdots, u_{r-1}))$$

$$- \sum_{j=1}^{r-1} \Phi(v, u_1, \cdots, [u, u_j], \cdots, u_{r-1})$$

$$= (\mathscr{L}_u \Phi)(v, u_1, \cdots, u_{r-1})$$

$$+ \Phi([u, v], u_1, \cdots, u_{r-1})$$

$$= (i_v \mathscr{L}_u \Phi)(u_1, \cdots, u_{r-1})$$

$$+ (i_{[u,v]} \Phi)(u_1, \cdots, u_{r-1}).$$

由 $u_1, \cdots, u_{r-1}$ 和 Φ 的任意性，得 (6)。□

里积映射将协变张量场降一阶。这给归纳法证明提供了巨大可能性。今作为例子，较简单地重新证明以前的一个结果。

6.6 定理 对于任意 $\mathscr{X}_r(E)$，$\forall u, v \in \mathscr{X}(E)$，Lie 微分算子 $\mathscr{L}_u$ 和 $\mathscr{L}_v$ 的换位子是 Lie 微分算子

$$[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] = \mathscr{L}_{[u,v]}. \tag{7}$$

证明 用归纳法证明。对于 $\mathscr{X}_0(E) = \mathscr{F}(E)$，定理 5.3 已证明了 (7)。设 (7) 式对 $\mathscr{X}_r(E)$ 成立。并设 $\Phi \in \mathscr{X}_{r+1}(E)$，则 $\forall w \in \mathscr{X}(E)$，$i_w \Phi \in \mathscr{X}_r(E)$。按归纳法假设，有

$$\mathscr{L}_u(\mathscr{L}_v i_w \Phi) - \mathscr{L}_v(\mathscr{L}_u i_w \Phi) = \mathscr{L}_{[u,v]} i_w \Phi. \tag{8}$$

由 (6)，又有

$$\mathscr{L}_{[u,v]} i_w = i_w \mathscr{L}_{[u,v]} + i_{[[u,v],w]} \tag{9}$$

和

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_u \mathscr{L}_v i_w &= \mathscr{L}_u(i_w \mathscr{L}_v + i_{[v,w]}) \\ &= (i_w \mathscr{L}_u + i_{[u,w]}) \mathscr{L}_v + i_{[v,w]} \mathscr{L}_u + i_{[u,[v,w]]} \\ &= i_w \mathscr{L}_u \mathscr{L}_v + i_{[u,w]} \mathscr{L}_v + i_{[v,w]} \mathscr{L}_u \\ &\quad + i_{[u,[v,w]]}. \end{aligned} \tag{10}$$

将 u 和 v 交换，又得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_v \mathscr{L}_u i_w &= i_w \mathscr{L}_v \mathscr{L}_u + i_{[v,w]} \mathscr{L}_u \\ &\quad + i_{[u,w]} \mathscr{L}_v + i_{[v,[u,w]]}. \end{aligned} \tag{11}$$

将 (10) 和 (11) 相减，利用 (3) 和 Jacobi 恒等式，得

$$[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v]\boldsymbol{i}_w = \boldsymbol{i}_w[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] + \boldsymbol{i}_{[u,[v,w]]} - \boldsymbol{i}_{[v,[u,w]]}$$
$$= \boldsymbol{i}_w[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] + \boldsymbol{i}_{[[u,v],w]}.$$

根据假设,对 $\mathscr{K}_r(\mathrm{E})$, (7) 式成立,故上式可写成

$$\mathscr{L}_{[u,v]}\boldsymbol{i}_w = \boldsymbol{i}_w[\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] + \boldsymbol{i}_{[[u,v],w]}. \tag{12}$$

和 (9) 式比较，依次得

$$\boldsymbol{i}_w([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] - \mathscr{L}_{[u,v]}) = \boldsymbol{O},$$
$$\boldsymbol{i}_w([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] - \mathscr{L}_{[u,v]})\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{O},$$
$$([\mathscr{L}_u, \mathscr{L}_v] - \mathscr{L}_{[u,v]})\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) = 0,$$
$$\forall_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r} \in \mathscr{K}(\mathrm{E}); \boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{K}_{r+1}(\mathrm{E}).$$

由 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 的任意性,得证, (7) 式对 $\mathscr{K}_{r+1}(\mathrm{E})$ 亦成立.

6.7 定理 记 E 上微分 r-形式的全体为 $\Omega_r(\mathrm{E}) \subset \mathscr{K}_r(\mathrm{E})$, 则按下述四条件定义的映射族

$$\boldsymbol{d}: \Omega_r(\mathrm{E}) \to \Omega_{r+1}(\mathrm{E}): \boldsymbol{\Phi} \longmapsto \boldsymbol{d\Phi} \ (r = 0, 1, \cdots, n) \tag{13}$$

是唯一确定的,称为 E 上的**外微分**,而 $\boldsymbol{d\Phi}$ 则称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的外微分. 对不同的 r, 映射 $\boldsymbol{d}$ 是不同的,但均用同一符号表示,有如 Lie 微分算子，有其方便之处. 这四个条件是:

(i) 函数（微分 0-形式）的外微分等于函数的微分:

$$\boldsymbol{d}f = df, \qquad \forall f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}). \tag{14}$$

(ii) 线性: $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}$; $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi} \in \Omega_r(\mathrm{E})$,

$$\boldsymbol{d}(\alpha\boldsymbol{\Phi} + \beta\boldsymbol{\Psi}) = \alpha\boldsymbol{d\Phi} + \beta\boldsymbol{d\Psi}. \tag{15}$$

(iii) 反导性: $\forall \boldsymbol{\Phi} \in \Omega_r(\mathrm{E})$; $\boldsymbol{\Psi} \in \Omega_s(\mathrm{E})$,

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi}) = \boldsymbol{d\Phi} \wedge \boldsymbol{\Psi} + (-1)^r \boldsymbol{\Phi} \wedge \boldsymbol{d\Psi}. \tag{16}$$

(iv) Poincaré 引理:

$$\boldsymbol{d}^2 = \boldsymbol{d} \circ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o} \ \text{即} \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{d\Phi}) = \boldsymbol{o}. \tag{17}$$

证明 在假设映射 $\boldsymbol{d}$ 存在下,先证唯一性. 为此,将 $\boldsymbol{\Phi} \in \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{E})$ 写成

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \Phi_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \Phi_{i_1 \cdots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}. \tag{18}$$

根据条件(i)和(iv)，有

$$d(dx^i) = d(dx^i) = O. \tag{19}$$

根据(iii)，并利用(19)，又有

$$d(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}) = O. \tag{20}$$

将 d 作用于 Φ，利用(ii)，(iii)，(20)和(i)，以及函数的微分的表达式(1.37)，依次得

$$\begin{aligned} d\Phi &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} d(\Phi_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}) \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} d\Phi_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \qquad (21) \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} \Phi_{i_1\cdots i_r,i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \qquad (22) \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+1}\Phi_{i_1\cdots i_k\cdots i_{r+1},i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}. \end{aligned}$$

(23)

(22)式对 i 按求和约定普遍求和。但对固定的一组 $(i_1,\cdots,i_r)$ 指标来说，当 i 取 $(i_1,\cdots,i_r)$ 中的一个值时，(22)式中的相应项为零。只有当 i 在 $1,\cdots,n$ 中由 $i_1,\cdots,i_r$ 分隔开来的 $r+1$ 组数中取值，相应的项才可能不为零。如果我们把 i 和 $i_1,\cdots,i_n$ 合在一起重新编号并按顺序排列，则当 i 是某个 i_k 时，它要和 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k-1}}$ 中的 $k-1$ 个微分1-形式换位，从而得符号 $(-1)^{k-1}$。i 要取遍这 $r+1$ 组指标，从而得(23)。(23)式唯一确定映射 d。

现证存在性。只需证明(21)，(22)或(23)式所确定的映射 d 满足条件(i—iv)。条件(i, ii)的满足是显然的。对于(iii)，由于线性，只需考虑 $\Phi = a dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$，$\Psi = b dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}$。这时，利用(21)，(22)和(1.37)，得

$$\begin{aligned} d(\Phi\wedge\Psi) &= d(ab\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}) \\ &= d(ab)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s} = (ab)_{,i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s} \\ &= a_{,i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge(b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}) \\ &\quad + ab_{,i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s} \end{aligned}$$

$$= da\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge(b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s})$$
$$+(-1)^r a\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge(db\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s})$$
$$= d\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}+(-1)^r\boldsymbol{\Phi}\wedge d\boldsymbol{\Psi}.$$

为了验证 (iv)，对 (23) 再求一次外微分

$$d(d\boldsymbol{\Phi})=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{r+2}\leqslant n}\sum_{l=1}^{r+2}\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+l}\Phi_{i_1\cdots\hat{i}_k\cdots\hat{i}_l\cdots i_{r+2},i_k i_l}$$
$$\times\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+2}}.$$

二阶偏导数次序可以交换，即下标关于 i_k 和 i_l 为对称，而微分形式 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge\cdots\wedge dx^{i_l}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+2}}$ 为反称，故上式为零。

6.8 定理 外微分公式 (21—23) 与坐标系无关，可写成不变形式

$$d\boldsymbol{\Phi}=(r+1)\mathscr{A}(\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}). \tag{24}$$

证明 虽然 (22) 或 (23) 中出现不按张量分量法则转换的偏导数，由于联络系数关于下标对称，(22) 式仍可写成张量分量形式。为此，将 (18) 写成张量分量表示式

$$\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{r!}\Phi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}, \tag{25}$$

然后求 $\boldsymbol{\Phi}$ 的外微分，得

$$d\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{r!}\Phi_{i_1\cdots i_r;i}dx^{i}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$
$$=\frac{1}{r!}\partial_{i_1}\Phi_{i_2\cdots i_{r+1}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}$$
$$=\frac{1}{r!}\nabla_{i_1}\Phi_{i_2\cdots i_{r+1}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}$$
$$=(r+1)\nabla_{i_1}\Phi_{i_2\cdots i_{r+1}}\mathscr{A}(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_{r+1}})$$
$$=(r+1)\mathscr{A}(\nabla_{i_1}\Phi_{i_2\cdots i_{r+1}}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_{r+1}})$$
$$=(r+1)\mathscr{A}(\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}).\ \square$$

可见，$\boldsymbol{\Phi}$ 的外微分就是 $\boldsymbol{\Phi}$ 的旋转 (V.11.4)。

6.9 引理 设 $\varphi:\mathscr{U}\to\mathscr{W}:X\longmapsto\varphi(X)$ 是区域映射，则对任何 $\Omega_r(\mathscr{W})$：

$$\varphi^*d=d\varphi^*, \tag{26}$$

即外微分和导映射的同态扩张可交换。

证明 先证

$$\varphi^*(\boldsymbol{d}f)=\boldsymbol{d}(\varphi^*f),\qquad \forall f\in\mathscr{F}(\mathscr{W}). \tag{27}$$

只需应用复合函数定理和 (3.37)，即得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(\varphi^*f)(X)&=\boldsymbol{d}(f\circ\varphi)(X)=f_{,A}(X)(dX^A)(X)\\&=f_{,i}(x(X))x^i_{,A}(X)dX^A(X)\\&=f_{,i}(x(X))\varphi^*(x(X))dx^i(x(X))\\&=(f_{,i}\circ\varphi)(X)(\varphi^*dx^i)(X)=(\varphi^*f_{,i})(X)(\varphi^*dx^i)(X)\\&=(\varphi^*(f_{,i}dx^i))(X)=(\varphi^*(\boldsymbol{d}f))(X).\end{aligned} \tag{28}$$

今取任意 $\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{r!}\ \Phi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\in\Omega(\mathscr{W})$，则由 (3.49，50)，利用 (27)，考虑到二阶偏导数次序可交换性和微分形式的反称性，我们有

$$\varphi^*\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{r!}(\Phi_{i_1\cdots i_r}\circ\varphi)x^{i_1}_{,A_1}\cdots x^{i_r}_{,A_r}dX^{A_1}\wedge\cdots\wedge dX^{A_r},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(\varphi^*\boldsymbol{\Phi})&=\frac{1}{r!}\boldsymbol{d}((\Phi_{i_1\cdots i_r}\circ\varphi)x^{i_1}_{,A_1}\cdots x^{i_r}_{,A_r})dX^{A_1}\wedge\cdots\wedge dX^{A_r}\\&=\frac{1}{r!}\Phi_{i_1\cdots i_r,A}dX^A\wedge(x^{i_1}_{,A_1}dX^{A_1})\wedge\cdots\wedge(x^{i_r}_{,A_r}dX^{A_r})\\&=\frac{1}{r!}d(\Phi_{i_1\cdots i_r}\circ\varphi)\wedge\varphi^*dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^*dx^{i_r}\\&=\frac{1}{r!}\varphi^*d\Phi_{i_1\cdots i_r}\wedge\varphi^*dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^*dx^{i_r}\\&=\varphi^*\left(\frac{1}{r!}d\Phi_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\right)=\varphi^*\boldsymbol{d\Phi}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\Phi}$ 的任意性，得证 (26)。

6.10 引理 对于任何 $\Omega_r(\mathrm{E})$，恒有

$$\boldsymbol{d}\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}=\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{d},\qquad \forall\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathrm{E}). \tag{29}$$

证明 设 $\boldsymbol{u}$ 生成流 φ_t，则按 Lie 导数的定义，利用 (26) 和外微分的线性性质，$\forall\boldsymbol{\Phi}\in\Omega_r(\mathrm{E})$，有

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{d\Phi})(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi^*_{-t}\boldsymbol{d\Phi}(x)-\boldsymbol{d\Phi}(x)]$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [\boldsymbol{d}(\varphi_{-t}^* \boldsymbol{\Phi})(x) - \boldsymbol{d}\boldsymbol{\Phi}(x)]$$

$$= \boldsymbol{d} \left[\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\varphi_{-t}^* \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Phi})\right](x)$$

$$= (\boldsymbol{d}\mathscr{L}_u \boldsymbol{\Phi})(x).$$

由 x 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 的任意性，得证 (29)。

6.11 引理(同伦公式 homotopy formula) 对任何 $\Omega_r(\mathrm{E})$，恒有

$$\mathscr{L}_u = \boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u, \qquad \forall u \in \mathscr{X}(\mathrm{E}). \tag{30}$$

证明 用归纳法证明。对于 $r = 0$，$f \in \Omega_0(\mathrm{E}) = \mathscr{F}(\mathrm{E})$，(30) 式成立，因这时 $\boldsymbol{i}_u f = 0$，

$$\mathscr{L}_u f = uf = (df)(u) = \boldsymbol{i}_u df. \tag{31}$$

设对 $r-1$，(30) 式成立。任何 $\boldsymbol{\Phi} \in \Omega_r(\mathrm{E})$ 可以表成 $\sum df_i \wedge \boldsymbol{\omega}_i$ 形式，其中 $f_i \in \Omega_0(\mathrm{E})$，$\boldsymbol{\omega}_i \in \Omega_{r-1}(\mathrm{E})$。由于 $\mathscr{L}_u$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{i}_u$ 均为线性算子，只需对 $df \wedge \boldsymbol{\omega} \in \Omega_r(\mathrm{E})$ 进行证明。考虑到 (16)，(5)，(31) 和 (29)，(30) 式的右端作用于 $df \wedge \boldsymbol{\omega}$ 给出

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d}(df \wedge \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u(df \wedge \boldsymbol{\omega}) &= -\boldsymbol{i}_u(df \wedge \boldsymbol{d}\omega) \\
&\quad + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{i}_u df \wedge \omega - df \wedge \boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\omega}) \\
&= -\boldsymbol{i}_u df \wedge \boldsymbol{d\omega} + df \wedge \boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d\omega} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u df \wedge \boldsymbol{\omega} \\
&\quad + \boldsymbol{i}_u df \wedge \boldsymbol{d\omega} + df \wedge \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\omega} \\
&= df \wedge (\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d}\omega + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u \omega) + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u df \wedge \boldsymbol{\omega} \\
&= df \wedge \mathscr{L}_u \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{d}\mathscr{L}_u f \wedge \boldsymbol{\omega} = df \wedge \mathscr{L}_u \boldsymbol{\omega} + \mathscr{L}_u df \wedge \boldsymbol{\omega} \\
&= \mathscr{L}_u(df \wedge \boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}$$

由 f 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的任意性，得证 (30)。

6.12 引理 设 $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E})$，$u \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$，$\boldsymbol{\Phi} \in \Omega_r(\mathrm{E})$，则

$$\mathscr{L}_{fu} \boldsymbol{\Phi} = f \mathscr{L}_u \boldsymbol{\Phi} + df \wedge \boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\Phi}. \tag{32}$$

证明 利用(30)，并考虑到(3)在场的情况下对 $\alpha, \beta \in \mathscr{F}(\mathrm{E})$ 亦成立，得

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{fu} \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{i}_{fu} \boldsymbol{d\Phi} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_{fu} \boldsymbol{\Phi} = f\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d\Phi} + \boldsymbol{d}(f\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\Phi}) \\
&= f\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d\Phi} + df \wedge \boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\Phi} + f\boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\Phi} \\
&= f(\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{d\Phi} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\Phi}) + df \wedge \boldsymbol{i}_u \boldsymbol{\Phi}.
\end{aligned}$$

此即(32)。

6.13 定理 $\Phi\in\Omega_r(E)$ 的外微分在 $u_1,\cdots,u_{r+1}$ 的值是

$$d\Phi(u_1,\cdots,u_{r+1})=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}u_i(\Phi(u_1,\cdots,\hat{u}_i,\cdots,u_{r+1}))$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}\Phi([u_i,u_j],u_1,\cdots,\hat{u}_i,\cdots,$$

$$\hat{u}_j,\cdots,u_{r+1}).\tag{33}$$

证明 用归纳法证明。当 $r=0$ 时，$\Phi=f\in\Omega_0(E)$，$df(u)=uf$，(33) 式显然成立。设对 $r-1$，(33) 式成立，则对 $\Phi\in\Omega_r(E)$，利用里积映射于 (33) 式左端，并利用 (30) 和 (5.22)，得

$$\begin{aligned}d\Phi(u_1,\cdots,u_{r+1})&=i_{u_1}d\Phi(u_2,\cdots,u_{r+1})\\&=\mathscr{L}_{u_1}\Phi(u_2,\cdots,u_{r+1})-di_{u_1}\Phi(u_2,\cdots,u_{r+1})\\&=\mathscr{L}_{u_1}(\Phi(u_2,\cdots,u_{r+1}))\\&\quad-\sum_{i=2}^{r+1}\Phi(u_2,\cdots,[u_1,u_i],\cdots,u_{r+1})\\&\quad-di_{u_1}\Phi(u_2,\cdots,u_{r+1}).\end{aligned}\tag{34}$$

已假设 (33) 对 $i_{u_1}\Phi\in\Omega_{r-1}(E)$ 成立：

$$\begin{aligned}&d(i_{u_1}\Phi)(u_2,\cdots,u_{r+1})\\&=\sum_{i=2}^{r+1}(-1)^i u_i(i_{u_1}\Phi(u_2,\cdots,\hat{u}_i,\cdots,u_{r+1}))\\&\quad+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}i_{u_1}\Phi([u_i,u_j],u_2,\cdots,\hat{u}_i,\cdots,\\&\quad\times\hat{u}_j,\cdots,u_{r+1}).\end{aligned}$$

将上式代入 (34)，得

$$\begin{aligned}d\Phi(u_1,\cdots,u_{r+1})&=u_1(\Phi(u_2,\cdots,u_{r+1}))\\&\quad-\sum_{i=2}^{r+1}(-1)^i\Phi([u_1,u_i],u_2,\cdots,\hat{u}_i,\cdots,u_{r+1})\\&\quad+\sum_{i=2}^{r+1}(-1)^{i+1}u_i(\Phi(u_1,\cdots,\hat{u}_i,\cdots,u_{r+1}))\\&\quad-\sum_{2\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}\Phi(u_1,[u_i,u_j],\end{aligned}$$

$$u_2, \cdots, \hat{u}_i, \cdots, \hat{u}_j, \cdots, u_{r+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} u_i(\Phi(u_1, \cdots, \hat{u}_i, \cdots, u_{r+1}))$$

$$+ \sum_{j=2}^{r+1} (-1)^{j+1} \Phi([u_1, u_j], u_2, \cdots, \hat{u}_j, \cdots, u_{r+1})$$

$$+ \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant r+1} (-1)^{i+j} \Phi([u_i, u_j], u_1, \cdots, \hat{u}_i, \cdots,$$

$$\times \hat{u}_j, \cdots, u_{r+1}).$$

合并后两项，即得 (33). □

本书采用了外微分的公理化定义.也可以用 (24) 不变形式作为定义，但由它推导性质 (iii) 较麻烦. 也有文献将 (33) 式作为外微分的定义，但这会使人有突如其来之感.

§7 Frobenius 定 理

设有处处不为零的光滑向量场 $u \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$. 它在每点 $x \in \mathrm{E}$ 的值 $u(x)$ 张成一个一维向量空间 $\mathfrak{D}(x) = \mathrm{span}\{u(x)\}$. u 的积分曲线(总是存在的!)是 E 的一维超曲面 $\mathscr{S}$. $\mathscr{S}$ 在每一点 x 的速度向量属于 $\mathfrak{D}(x)$，或者说 $\mathscr{S}$ 在 x 和 $\mathfrak{D}(x)$ 相切. 这些向量空间 $\mathfrak{D}(x)$, $\forall x \in \mathrm{E}$, 构成一个场 $\mathfrak{D}$，称为 E 的一个**一维分布** (distribution). E 中的一维超曲面 $\mathscr{S}$ 称为一维分布 $\mathfrak{D}$ 的**积分曲面**，如果 $\mathscr{S}$ 在它的每一点切于 $\mathfrak{D}$. 一个无处为零的光滑向量场唯一确定一个一维分布. 我们说，向量场 u **包含于**一维分布 $\mathfrak{D}$，如果 $u(x) \in \mathfrak{D}(x)$, $\forall x \in \mathrm{E}$. 一个一维分布 $\mathfrak{D}$ 可以包含无穷多个向量场.

将上述概念推广至更多的向量场，就有

7.1 定义 设 $r < n$, E 上的一个 r 维分布 $\mathfrak{D}$ 是一个 r 维向量空间场 $\bigcup_{x \in \mathrm{E}} \mathfrak{D}(x)$. 显然，存在 r 个包含于 $\mathfrak{D}$ 的线性无关向量场 $u_1, \cdots, u_r$, 使得 $\mathfrak{D}(x) = \mathrm{span}\{u_1(x), \cdots, u_r(x)\}$. $\{u_1, \cdots, u_r\}$ 称为 $\mathfrak{D}$ 的一个**局部基**. 分布 $\mathfrak{D}$ 称为**光滑的**，如果它的局部基的每

一个向量场都是光滑的. □

今后只讨论光滑分布.

7.2 定义 r 维分布 $\mathfrak{D}$ 称为**对合的** (involutive), 如果它对 Lie 括弧积运算是封闭的:

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{D} \Rightarrow [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \in \mathfrak{D}. \tag{1}$$

7.3 定义 r 维分布 $\mathfrak{D}$ 称为**在点 $x \in \mathrm{E}$ 可积**, 如果在点 x 的邻域存在这样的坐标系 $\{x^i\}$, 它的自然局部基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的前 r 个[1] 向量场$\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_r\}$ 构成 $\mathfrak{D}$ 的局部基. 这条件等价于:

$$x^{r+1} = \text{const.}, \cdots, x^n = \text{const.} \tag{2}$$

是 $\mathfrak{D}$ 的积分曲面 $\mathscr{S}$. 如果 $\mathfrak{D}$ 在 E 或某开域 $\mathscr{U} \subset \mathrm{E}$ 上的每一点可积, $\mathfrak{D}$ 称为**可积的**. 由于任何坐标系的自然局部基是光滑向量场, 可积的分布必光滑. □

可以等价地说, $\mathscr{S}$ 是 $\mathfrak{D}$ 的积分曲面, 如果 $\mathscr{S}$ 在每一点和 $\mathfrak{D}$ 相切, 即在 $\mathscr{S}$ 上过任何点 $x \in \mathscr{S}$ 的光滑曲线的全体在点 x 的速度向量张成 $\mathfrak{D}(x)$. 包含于 $\mathfrak{D}$ 的任何向量场的积分曲线在某一积分曲面 $\mathscr{S}$ 上.

"寻找向量场 $\boldsymbol{u}$ (或者说, 以 $\boldsymbol{u}$ 为右端的常微分方程组) 的积分曲线问题"可以叙述为"寻找相应的一维分布的积分曲面问题". 根据常微分方程的理论, 光滑的一维分布总是可积的, 其积分曲面就是积分曲线. 但 $r(>1)$ 维的光滑分布不一定可积, 其可积条件由 Frobenius 定理给出. 下面几个定理是预备性的.

7.4 定理 设 $\varphi: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ 是区域映射. $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$ 生成流

$$\phi: \mathrm{E} \times \mathrm{R} \to \mathrm{E}: (x, t) \longmapsto \phi(x, t) \equiv \phi_t(x) \equiv \phi_x(t), \tag{3}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 是 **φ-不变的**:

$$\varphi_* \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}, \tag{4}$$

当且仅当(下式两端却有定义的情况下)

$$\varphi(\phi(x, t)) = \phi(\varphi(x), t). \tag{5}$$

证明 (必要性) 设 $\boldsymbol{u}$ 生成流 (3). $\phi_x \equiv \phi(x, \cdot)$ 是 $\boldsymbol{u}$ 过点

---

1) 这不失一般性. 若不然, 可通过调整坐标的编号次序做到这一点.

$\phi(x,0)=x$ 的积分曲线，它在点 $\phi(x,t)$的速度向量是 $\boldsymbol{u}(\phi(x,t))$；$\boldsymbol{u}$ 过点 $\varphi(x)$ 的积分曲线则是 $\phi_{\varphi(x)}=\phi(\varphi(x),\cdot)$，它在点 $\phi(\varphi(x),t)$ 的速度向量则是 $\boldsymbol{u}(\phi(\varphi(x),t))$. 在区域映射 φ 下曲线 ϕ_x 的象是 $\varphi\circ\phi_x$，它过点 $\varphi(\phi(x,0))=\varphi(x)$. 根据 (3.15)，$\varphi\circ\phi_x$ 在任意点 $\varphi(\phi(x,t))$ 的速度向量等于在 φ_* 下 ϕ_x 在点 $\phi(x,t)$ 的速度向量的象(利用(4))：

$$\begin{aligned}\varphi_*(\phi(x,t))\boldsymbol{u}(\phi(x,t)) &= \varphi_*\boldsymbol{u}(\varphi(\phi(x,t)))\\ &= \boldsymbol{u}(\varphi(\phi(x,t))),\end{aligned}$$

而后者又是给定向量场 $\boldsymbol{u}$ 在点 $\varphi(\phi(x,t))$ 的值. 因此，$\varphi\circ\phi_x$ 同时也是向量场 $\boldsymbol{u}$ 过点 $\varphi(x)$ 的积分曲线. 根据积分曲线的唯一性，有

$$\varphi\circ\phi_x=\phi_{\varphi(x)}, \tag{6}$$

此即 (5) 式.

(充分性) 利用标量函数 Lie 导数的公式 (5.13) 和假设条件 (5)，$\forall f\in\mathscr{F}(\varphi(x))$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\varphi(x))f &= \lim_{t\to0}\frac{1}{t}[f(\phi(\varphi(x),t))-f(\varphi(x))]\\ &= \lim_{t\to0}\frac{1}{t}[f(\varphi(\phi(x,t)))-f(\varphi(x))]\\ &= \lim_{t\to0}\frac{1}{t}[f\circ\varphi(\phi(x,t))-f\circ\varphi(x)]\\ &= \boldsymbol{u}(x)(f\circ\varphi)=(\varphi_*(x)\boldsymbol{u}(x))f\\ &= \varphi_*\boldsymbol{u}(\varphi(x))f.\end{aligned}$$

由 f 和 x 的任意性，得(4).

7.5 定理 设有 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}(\mathrm{E})$，生成流 φ，则 $\boldsymbol{u}$ 是 φ_t-不变的：

$$\varphi_{t*}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u},\ \forall t\in\mathrm{R}. \tag{7}$$

证明 $\forall x\in\mathrm{E}$；$t\in\mathrm{R}$；$f\in\mathscr{F}(\varphi_t(x))$，有

$$\begin{aligned}\varphi_{t*}\boldsymbol{u}(\varphi_t(x))f &= (\varphi_{t*}(x)\boldsymbol{u}(x))f=\boldsymbol{u}(x)(f\circ\varphi_t)\\ &= \lim_{s\to0}\frac{1}{s}[\varphi_{-s*}(f\circ\varphi_t)(x)-(f\circ\varphi_t)(x)]\\ &= \lim_{s\to0}\frac{1}{s}[(f\circ\varphi_t)(\varphi_s(x))-(f\circ\varphi_t)(x)]\end{aligned}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [f(\varphi_t(\varphi_s(x))) - f(\varphi_t(x))]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} [f(\varphi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(x))]$$

$$= \boldsymbol{u}(\varphi_t(x))f,$$

其中考虑到流的加法群性质(定理 4.4). 由 x, t 和 f 的任意性, 上式给出(7).□

其实, 定理 7.5 是定理 7.4 的直接推论. 只要取 $\varphi_t: \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ 作为定理 7.4 的区域映射, 而 $\boldsymbol{u}$ 生成流 $\varphi(x, t)$, 则有

$$\varphi_t(\varphi(x, t)) = \varphi(\varphi(x, t), t) = \varphi(\varphi_t(x), t).$$

这正是条件 (5). 于是由 (4) 式就有 (7).

7.6 定理 设 $\varphi: \mathscr{U} \subset \mathbf{E} \to \mathscr{W} \subset \mathbf{E}$ 是区域映射. 向量场 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{X}(\mathscr{U})$ 和 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathscr{X}(\mathscr{W})$ 分别是 φ-**相关的**:

$$\varphi_* \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1, \qquad \varphi_* \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2, \tag{8}$$

则 $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ 和 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 亦 φ-相关:

$$\varphi_*[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [\varphi_* \boldsymbol{u}_1, \varphi_* \boldsymbol{u}_2]. \tag{9}$$

证明 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 φ-相关的条件是 $\varphi_* \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, 即

$$\varphi_* \boldsymbol{u}(\varphi(x))f = \boldsymbol{v}(\varphi(x))f, \qquad \forall x \in \mathscr{U}; f \in \mathscr{F}(\mathscr{W}). \tag{10}$$

由推前映射的定义, 上式左端可写为

$$\varphi_* \boldsymbol{u}(\varphi(x))f = (\varphi_*(x)\boldsymbol{u}(x))f = \boldsymbol{u}(x)(f \circ \varphi) = \boldsymbol{u}(f \circ \varphi)(x), \tag{11}$$

而 (10) 式右端则可写成

$$\boldsymbol{v}(\varphi(x))f = \boldsymbol{v}f(\varphi(x)) = ((\boldsymbol{v}f) \circ \varphi)(x). \tag{12}$$

利用这两表达式, 由 x 的任意性, (10) 式又等价于

$$\boldsymbol{u}(f \circ \varphi) = (\boldsymbol{v}f) \circ \varphi. \tag{13}$$

在 (13) 中取 $\boldsymbol{u}_1$ 为 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_1$ 为 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_2 f$ 为 f, 得

$$\boldsymbol{u}_1((\boldsymbol{v}_2 f) \circ \varphi) = (\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2 f)) \circ \varphi \ . \tag{14}$$

利用 $(8)_2$ 和 (13) 于上式左端, 我们有

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_2(f \circ \varphi)) = (\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2 f)) \circ \varphi. \tag{15}$$

将编号 1 和 2 交换, 又有

$$\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{u}_1(f \circ \varphi)) = (\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{v}_1 f)) \circ \varphi. \tag{16}$$

将(15)式减去(16)式，得

$$u_1(u_2(f\circ\varphi))-u_2(u_1(f\circ\varphi))=(v_1(v_2f)-v_2(v_1f))\circ\varphi,$$

即

$$[u_1,\ u_2](f\circ\varphi)=([v_1,\ v_2]f)\circ\varphi. \tag{17}$$

和(13)比较，上式说明 $[u_1,\ u_2]$ 和 $[v_1,\ v_2]$ φ-相关. □

(9)式最后一项说明，推前映射可以拿到 Lie 括弧内.

7.7 定理 设 $u,v\in\mathscr{X}(E)$，对应的流分别是 φ 和 ψ，则

$$\varphi_t\circ\psi_s=\psi_s\circ\varphi_t\ (\forall t,\ s\in R)\Longleftrightarrow[u,\ v]=o. \tag{18}$$

意义是：两个单参群的作用可交换的充要条件是对应的无穷小生成元的 Lie 括弧为零(图 9).

证明 (必要性) $\forall x\in E$，(18)的左式可写为

$$\varphi_t(\psi(x,\ s))=\psi(\varphi_t(x),\ s). \tag{19}$$

根据定理 7.4，上式说明：v 是 φ_t-不变的：

$$\varphi_{t*}v=v. \tag{20}$$

因 φ_{t*} 是同构映射，也有

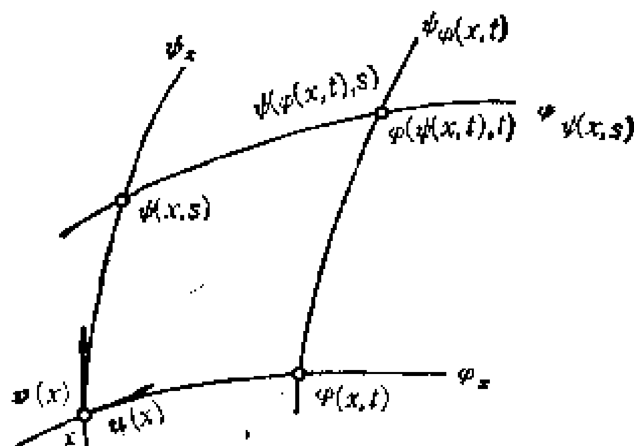


图 9

$$\varphi_{-t*}v=v. \tag{21}$$

利用这结果，有

$$[u,\ v]=\mathscr{L}_uv=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(\varphi_{-t*}v-v)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(v-v)=o.$$

(充分性) 设 $[u,\ v]=o$. 利用(9)和(7)，有

$$0 = \varphi_{t*}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = [\varphi_{t*}\boldsymbol{u}, \varphi_{t*}\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}, \varphi_{t*}\boldsymbol{v}]. \qquad (22)$$

于是，$\forall f \in \mathscr{F}(\mathbf{E})$，有[1]

$$\begin{aligned} 0 &= [\boldsymbol{u}, \varphi_{t*}\boldsymbol{v}](x)f = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\varphi_{t*}\boldsymbol{v}))(x)f \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\varphi_{-\Delta t*}(\varphi_{t*}\boldsymbol{v})(x)f - \varphi_{t*}\boldsymbol{v}(x)f] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\varphi_{(t-\Delta t)*}\boldsymbol{v}(x)f - \varphi_{t*}\boldsymbol{v}(x)f] \\ &= -\frac{d}{dt}[\varphi_{t*}\boldsymbol{v}(x)f]. \end{aligned}$$

由此，$\varphi_{t*}\boldsymbol{v}(x)f$ 与 t 无关．该表达式在 $t = 0$ 时的值是 $\boldsymbol{v}(x)f$，故

$$\varphi_{t*}\boldsymbol{v}(x)f = \boldsymbol{v}(x)f.$$

由 x 和 f 的任意性，得(20)．根据定理 7.4，又得(19)，即(18)的左式．□

设想过 $x \in \mathbf{E}$ 有 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$（在每一点线性无关，且其 Lie 括弧积等于零）的积分曲线 φ_x 和 ψ_x．假设它们是伸展至无穷的简单曲线（如果不是这种情况，则可考虑含 x 的开域 $\mathscr{U} \subset \mathbf{E}$，在那里 φ_x 和 ψ_x 是简单的光滑线段）．又作 $\boldsymbol{u}$ 过 ψ_x 各点的积分曲线 $\varphi_{\psi(x,s)}(s \in \mathbb{R})$ 和 $\boldsymbol{v}$ 过 φ_x 各点的积分曲线 $\psi_{\varphi(x,t)}(t \in \mathbb{R})$．根据定理 7.7，点 $\varphi(\psi(x, s), t)$ 和点 $\psi(\varphi(x, t), s)$ 重合．参量 t 和 s 完全刻划了这一点．对于取定的点 x，$t = s = 0$．因此，两积分曲线族 $\{\varphi_{\psi(x,s)} | s \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{\psi_{\varphi(x,t)} | t \in \mathbb{R}\}$ 构成两个相互重合的 2 维超曲面，上面有一个以 (t, s) 为坐标的坐标网．在这坐标网里，点 x 有坐标 $(0, 0)$，是原点．如果另选一个不在这超曲面上的点，我们又可用同法构造另一个 2 维超曲面，也具有 $t-s$ 坐标网（如果

1) 下面用到结果 $\varphi_{s*}(\varphi_{t*}v) = \varphi_{(s+t)*}v$．根据是

$$\begin{aligned} \varphi_{s*}(\varphi_{t*}v)(x)f &= (\varphi_{s*}(\varphi_{-s}(x))(\varphi_{t*}v)(\varphi_{-s}(x)))f \\ &= \varphi_{t*}v(\varphi_{-s}(x))(f \circ \varphi_s) \\ &= (\varphi_{t*}(\varphi_{-t-s}(x))v(\varphi_{-t-s}(x)))(f \circ \varphi_s) \\ &= v(\varphi_{-t-s}(x))(f \circ \varphi_{t+s}) \\ &= (\varphi_{(t+s)*}(\varphi_{-t-s}(x))v(\varphi_{-t-s}(x)))f \\ &= \varphi_{(t+s)*}v(x)f. \end{aligned}$$

用相同的参量的话）．如果只孤立地讨论一个 2 维超曲面，每个超曲面的原点是可以任意选择的，但我们将作特殊的选择．不断地构造这些 2 维超曲面，它们终于充满 E（或 $\mathscr{U} \subset \mathrm{E}$）．因为一个向量场的积分曲线不相交，这些 2 维超曲面也不相交．我们说，它们把 **E 分层．**

现改记 $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{g}_1$，$t \equiv x^1$ 和 $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{g}_2$，$s = x^2$；并考虑另一向量场 $\boldsymbol{g}_3 \in \mathscr{X}(\mathrm{E})$，满足 $\boldsymbol{g}_1 \wedge \boldsymbol{g}_2 \wedge \boldsymbol{g}_3 \neq \boldsymbol{O}$，$[\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_3] = \boldsymbol{o}$ 和 $[\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3] = \boldsymbol{o}$．我们取 $\boldsymbol{g}_3$ 过 $\boldsymbol{x}$ 点的积分曲线上的各点作为各有关 $x^1 - x^2$ 坐标网的原点，而某一确定的 $x^1 - x^2$ 超曲面上所有点作为 $\boldsymbol{g}_3$ 过这些点的积分曲线的原点：参量 $x^3 = 0$．根据定理 7.7，又可构造一族 $x^1 - x^3$ 和 $x^2 - x^3$ 超曲面．从而得到一个 3 维超曲面和以点 $\boldsymbol{x}$ 为原点的 (x^1, x^2, x^3) 坐标网．在这个 3 维超曲面上的每一点有一组确定的坐标值 (x^1, x^2, x^3)．再取一个不属于这个 3 维超曲面的点，用相同步骤又可构造另一个与之不相交的 3 维超曲面．不断地构造这些 3 维超曲面，终于它们又把空间分层．类似地做下去，直到第 n 个向量场 $\boldsymbol{g}_n$，而最终得到一个 n 维超曲面，它就是 E 或 E 的一部份．在这个 n 维超曲面上有一个 n 参量的坐标网，它就是由 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 导出的曲线坐标系 $\{x^i\}$．归结起来，就有以下定理．

7.8 定理　设 $\{x^i\}$ 是 E 的曲线坐标系，$\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是自然局部基．基

$$\{\boldsymbol{g}_I = A^i_I \boldsymbol{g}_i \mid \quad \det[A^i_I] \neq 0\} \tag{23}$$

是完整系的充分必要条件是

$$[\boldsymbol{g}_I, \boldsymbol{g}_J] = \boldsymbol{o}. \tag{24}$$

证明　下面给出另一种证法．将 (23) 代入 (24) 左端，并考虑到 (2.10)，第 V 章 § 9 的一个结果

$$\partial_j A^p_I = -A^i_I A^p_k \partial_j A^K_i \tag{25}$$

以及非完整对象的定义 (V. 9.25)，我们有

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{g}_I, \boldsymbol{g}_J] &= [A^i_I \boldsymbol{g}_i, A^j_J \boldsymbol{g}_j] = (A^i_I \partial_i A^p_J - A^j_J \partial_j A^p_I) \boldsymbol{g}_p \\
&= (A^i_I A^j_J \partial_j A^K_i - A^i_I A^j_J \partial_i A^K_j) A^p_k \boldsymbol{g}_p \\
&= -2 A^i_I A^j_J \partial_{[i} A^K_{j]} A^p_k \boldsymbol{g}_p = -2\Omega_{IJ}{}^K A^i_K \boldsymbol{g}_i = -2\Omega_{IJ}{}^K \boldsymbol{g}_K.
\end{aligned}$$

根据第V章定理9.7，就得定理的结论.

7.9 定理（Frobenius） r 维光滑分布 $\mathfrak{D}$ 是可积的，当且仅当它是对合的.

证明 这是一个局部性定理，只需对任意点的一个足够小邻域进行证明.

（必要性） 设 $\mathfrak{D}$ 可积,则存在坐标系 $\{x^i\}$，其 $(x^1,\cdots,x^r)$ 坐标超曲面是 $\mathfrak{D}$ 的积分曲面，其自然局部基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 的前 r 个向量场 $\{\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_r\}$ 构成 $\mathfrak{D}$ 的局部基. 又设有包含于 $\mathfrak{D}$ 的任意两向量场

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{r}u^i\boldsymbol{g}_i,\qquad \boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{r}v^j\boldsymbol{g}_j,$$

则利用 (2.10)，有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]&=\left[\sum_{i=1}^{r}u^i\boldsymbol{g}_i,\sum_{j=1}^{r}v^j\boldsymbol{g}_j\right]\\&=\sum_{i,j=1}^{r}(u^j\partial_jv^i-v^j\partial_ju^i)\boldsymbol{g}_i\in\mathfrak{D}.\end{aligned}$$

于是 (1) 满足.

（充分性） 设 (1) 满足,则对 $\mathfrak{D}$ 的任何局部基 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$，有

$$[\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j]=\sum_{k=1}^{r}B_{ij}^k\boldsymbol{v}_k,\quad i,j=1,\cdots,r,\tag{26}$$

其中 B_{ij}^k 是光滑函数. 今设有曲线坐标系 $\{y^i\}$，其自然局部基为 $\{\boldsymbol{h}_i\}$，则有

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{j=1}^{r}v_i^j\boldsymbol{h}_j+\sum_{j=r+1}^{n}v_i^j\boldsymbol{h}_j,\qquad i=1,\cdots,r.\tag{27}$$

因为 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\}$ 线性无关,不失一般性,可调整坐标 $\{y^i\}$ 的编号次序,使得[1)]

---

1) 事实上，$\sum_{i=1}^{r}\alpha^i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{o}\Longrightarrow\alpha^i=0,i=1,\cdots,r$，而该零线性组合又可写为 $\sum_{i,j=1}^{r}\alpha^iv_i^j\boldsymbol{h}_j+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\alpha^iv_i^j\boldsymbol{h}_j=\boldsymbol{o}$. 因 $\{\boldsymbol{h}_i\}$ 是基，故 $\sum_{i=1}^{r}\alpha^iv_i^j=0$. 这是含 r 个未知数 α^i 的 n 个齐次线性方程组. 只存在零解的充要条件是 $\operatorname{rank}[v_i^j]=r$. 由此得(28).

$$\det[v_i^j]_{r\times r} \neq 0. \tag{28}$$

今定义 $\mathfrak{D}$ 上的一组新局部基 $\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_r\}$ 如下:

$$\boldsymbol{g}_i = \sum_{j=1}^{r} \overset{-1}{v}{}_i^j \boldsymbol{v}_j, i = 1, \cdots, r, \tag{29}$$

其中 $[\overset{-1}{v}{}_i^j]$ 是 $[v_i^j]$ 的逆阵. 将 (27) 代入 (29), 得

$$\boldsymbol{g}_i = \sum_{j,k=1}^{r} \overset{-1}{v}{}_i^j v_j^k \boldsymbol{h}_k + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=r+1}^{n} \overset{-1}{v}{}_i^j v_j^k \boldsymbol{h}_k$$

$$= \boldsymbol{h}_i + \sum_{j=r+1}^{n} g_i^j \boldsymbol{h}_j = g_i^j \boldsymbol{h}_j, \tag{30}$$

其中

$$g_i^j = \delta_i^j, \qquad \forall j \leqslant r. \tag{31}$$

利用 (2.10) 计算任意两向量场 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}_j$ 的 Lie 括弧积

$$[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j] = [g_i^k \boldsymbol{h}_k, g_j^l \boldsymbol{h}_l] = \sum_{k=r+1}^{n} (g_i^l \partial_l g_j^k - g_j^l \partial_l g_i^k) \boldsymbol{h}_k$$

$$= \sum_{k=r+1}^{n} C_{ij}^k \boldsymbol{h}_k. \tag{32}$$

另一方面,据假设, $[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j] \in \mathfrak{D}$, 故

$$[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j] = \sum_{k=1}^{r} D_{ij}^k \boldsymbol{g}_k. \tag{33}$$

将 (30) 代入 (33), 又有

$$[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j] = \sum_{k=1}^{r} D_{ij}^k \boldsymbol{h}_k + \sum_{k=r+1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{r} D_{ij}^l g_l^k \right) \boldsymbol{h}_k. \tag{34}$$

比较 (32) 和 (34), 得

$$\sum_{k=1}^{r} D_{ij}^k \boldsymbol{h}_k = \boldsymbol{o}. \tag{35}$$

因 $\{\boldsymbol{h}_k\}$ 是基,故 $D_{ij}^k = 0$, $i, j, k = 1, \cdots, r$. 于是, (33) 给出

$$[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j] = \boldsymbol{o}, \ i, j = 1, \cdots, r, \tag{36}$$

根据定理 7.7 后面所述，$\mathfrak{D}$ 的局部基 $\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_r\}$ 的每对向量场 $\boldsymbol{g}_i$ 和$\boldsymbol{g}_j$ 诱导出一张张由相应的积分曲线交织而成的互不相交的 2 维超曲面，而整个基 $\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_r\}$ 就诱导出一张张互不相交的 r 维超曲面. 在每一 r 维超曲面上的点有 r 条分别对应于局部基向量场的积分曲线相交. 各积分曲线的参量值就是该点在该 r 维超曲面坐标网上的坐标.

为了构造向量场 $\boldsymbol{g}_{r+1}$，任取一个上述的 r 维超曲面，并取定它的原点 x. 过 x 作一光滑曲线 φ_x，要求：1) 它和上述各 r 维超曲面(在定义域 E 或 $\mathscr{U} \subset$E 内)交于一且仅一点$\varphi(x, x^{r+1})$，其中x^{r+1} 是曲线 φ_x 的参量；2) 它在每点的速度向量不为零，且不属于 $\mathfrak{D}(\varphi(x, x^{r+1}))$. 取这交点 $\varphi(x, x^{r+1})$ 为相应的各 r 维坐标超曲面的原点，形成该曲面的坐标网. 将各 r 维超曲面上具有相同坐标 $(x^1, \cdots, x^r)$ 的点连成一条曲线，并均取 x^{r+1} 为这些曲线的参量，而且在每一 r 维超曲面上，这些曲线的点的 x^{r+1} 的值相同. 由于在每一 r 维超曲面上，从原点至具有任意坐标 $(x^1, \cdots, x^r)$ 的映射是 r 个单参群的复合(可交换)，而按假设 φ_x 是光滑曲线，上面连成的所有曲线也是光滑的，而且处处具有不为零的速度向量(非零向量的推前)，因此，这些速度向量构成一个光滑向量场 $\boldsymbol{g}_{r+1}$，而连成的曲线就是该向量场的积分曲线，从而构成流 $\varphi_{x^{r+1}}$. 从这些曲线的构造可知，$\varphi_{x^{r+1}}$ 和向量场 $\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_r$ 生成的流 $\varphi_{x^1}, \cdots, \varphi_{x^r}$ 可交换，即满足 (18) 式. 根据定理 7.7，我们有

$$[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_{r+1}] = \boldsymbol{o}, \qquad i = 1, \cdots, r, \tag{37}$$

并得到一张 $r+1$ 维超曲面. 再类似地从它的原点出发作满足上述相同条件的光滑曲线，又得到被这曲线所穿过的一张张 $r+1$ 维超曲面，并且得 $\boldsymbol{g}_{r+2}$. 直到得到 $\boldsymbol{g}_n$，从而得到 E 或 $\mathscr{U} \subset$E 的一个曲线坐标系 $\{x^i\}$ 及其自然局部基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$. 对于这个坐标系，由 $\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_r\}$ 张成的 r 维分布 $\mathfrak{D}$ 诱导出的每一张 r 维超曲面是 $(x^1, \cdots, x^r)$ 坐标面，它的各点具有相同的坐标 $x^{r+1}, \cdots, x^n$，从而是 $\mathfrak{D}$ 的积分曲面. □

在应用上，用微分形式表达的 Frobenius 定理的对偶表述更

为方便，因为它直接给出 Pfaff 方程组的可积条件. 为了证明两种表述的等价性，需要定理 6.13 的一种特殊情形.

7.10 引理 设 $\boldsymbol{\omega}\in\mathscr{X}^*(\mathbf{E})$, $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\in\mathscr{X}(\mathbf{E})$, 则

$$d\omega(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{u}_i(\omega(\boldsymbol{u}_j)) - \boldsymbol{u}_j(\omega(\boldsymbol{u}_i)) - \omega([\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j]). \tag{38}$$

7.11 定理 (Frobenius, 对偶表述) r 维光滑分布 $\mathfrak{D}$ 是可积的，当且仅当在每点 $x\in\mathbf{E}$ 的邻域存在 $n-r$ 个线性无关的微分 1-形式 $\boldsymbol{\omega}^{r+1},\cdots,\boldsymbol{\omega}^n$, 它们在 $\mathfrak{D}$ 上为零:

$$\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{u}) = 0, \qquad \forall i = r+1,\cdots,n;\ \boldsymbol{u}\in\mathfrak{D}, \tag{39}$$

并满足

$$d\omega^i = \sum_{j=r+1}^{n} \boldsymbol{\varphi}^i_j\wedge\boldsymbol{\omega}^j, \qquad i = r+1,\cdots,n, \tag{40}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}^i_j$ 是 $(n-r)^2$ 个合适的微分 1-形式.

证明 设 $\{\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_r\}$ 是 $\mathfrak{D}$ 在点 $x\in\mathbf{E}$ 的邻域的局部基. 可以补充为 $\mathbf{E}$ 在该邻域的基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$, 并且存在它的唯一的对偶基 $\{\boldsymbol{\omega}^i\}$, 满足 $\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{g}_j) = \delta^i_j$, 从而

$$\boldsymbol{\omega}^j(\boldsymbol{g}_i) = 0, \qquad i = 1,\cdots,r;\ j = r+1,\cdots,n. \tag{41}$$

根据线性性质，此即 (39). 由定理 7.9, $\mathfrak{D}$ 的可积分的充要条件是

$$[\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j] = \boldsymbol{o}, \qquad i, j = 1,\cdots,r. \tag{42}$$

任一个 $\boldsymbol{\omega}^i (i = r+1,\cdots,n)$ 的外微分可在基上分解:

$$d\omega^i = \frac{1}{2} b^i_{jk}\boldsymbol{\omega}^j\wedge\boldsymbol{\omega}^k = b^i_{jk}\boldsymbol{\omega}^j\otimes\boldsymbol{\omega}^k, \tag{43}$$

其中分量(关于下标反对称)是

$$b^i_{jk} = d\omega^i(\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k). \tag{44}$$

另一方面，对 $j, k = 1,\cdots,r$, 将 (38) 应用于 (44), 并考虑到 (41) 和 (42), 有

$$b^i_{jk} = \boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{g}_k)) - \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{g}_j)) - \boldsymbol{\omega}^i([\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k]) = 0. \tag{45}$$

于是，考虑到 b^i_{jk} 关于下标和外积的反称性，对 $i = r+1,\cdots,n$, 有

$$d\omega^i = \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n} + \sum_{k=r+1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r} + \sum_{j=r+1}^{n}\right)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\, b^i_{kj}\omega^k \wedge \omega^j\right)$$
$$= \sum_{j=r+1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{r} + \frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{n}\right) b^i_{kj}\omega^k\right)\wedge \omega^j.$$

只需取

$$\varphi^i_j = \left(\sum_{k=1}^{r} + \frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{n}\right) b^i_{kj}\omega^k,$$

就得条件 (40). 上面只证明了必要性. 读者试证充分性.

7.11 推论 定理 7.10 的可积条件 (40) 等价于

$$d\omega^i \wedge \omega^{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega^n = O, \qquad i = r+1, \cdots, n. \tag{46}$$

证明 必要性是显然的(只需将 (40) 代入 (46) 的左端). 现证充分性. 设 $\{\omega^i\}$ 为定理 7.10 证明中的对偶基, 则, 对 $i = r+1, \cdots, n$, $d\omega^i$ 可写成

$$d\omega^i = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} b^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant r} b^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$$
$$+ \sum_{j=r+1}^{n}\varphi^i_j\wedge\omega^j. \tag{47}$$

将之代入 (46) 左端,得

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant r} b^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^{r+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n = O,$$
$$i = r+1, \cdots, n. \tag{48}$$

由于 $\{\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^{r+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n \mid 1\leqslant j<k\leqslant r\}$ 是基 $\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_{n-r+2}} \mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-r+2}\leqslant n\}$ 的一部分, 故有

$$b^i_{jk} = 0, \qquad i = r+1, \cdots, n,\ 1\leqslant j<k\leqslant r. \tag{49}$$

(47) 只余下后一个和, 此即 (40) 式. □

为了说明 Frobenius 定理的应用,今举

例1. 设在 $\mathbf{E}^3$ 有直角坐标系 $\{x, y, z\}$, 并有 Pfaff 方程

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0, \tag{50}$$

其中 $P, Q, R \in \mathscr{F}(\mathbf{E})$. 在古典意义下，将 (50) 积分，意味着找出这些二维曲面，这些曲面在每一点 (x, y, z) 的切向量 (dx, dy, dz) 和向量 $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 正交. 现用本节的语言探讨 (50) 的可积性. 向量场 (P, Q, R) 确定一个 2 维光滑分布 $\mathfrak{D}$: $\mathfrak{D}(x)$ 与 $(P, Q, R)(x)$ "正交". 记 (50) 左端为 ω，则它在 $\mathfrak{D}$ 上为零，因根据正交条件，$\forall(u, v, w) \in \mathfrak{D}$,

$$\omega((u, v, w)) = Pdx(u, v, w) + Qdy(u, v, w) + Rdz(u, v, w) = Pu + Qv + Rw = 0.$$

根据推论 7.11，$\mathfrak{D}$ 的可积条件是

$$d\omega \wedge \omega = O. \tag{51}$$

将

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy\right) \wedge dz = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$

和 (50) 代入 (51)，得可积条件

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{52}$$

例 2. 在 $\mathbf{E}^3$, Pfaff 方程组

$$\left.\begin{aligned} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \\ Ldx + Mdy + Ndz = 0 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

总是可积的，因 (53) 对应的是 1 维分布. 如果设 $\omega^2 = Pdx + Qdy + Rdz$ 和 $\omega^3 = Ldx + Mdy + Ndz$，则可积条件

$$d\omega^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = O, \qquad d\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = O$$

总是满足的，因在 $\mathbf{E}^3$ 任何微分4-形式总等于零.

第X章　非完整力学系统

为了说明前一章某些概念的应用，本章简单介绍分析力学中的一阶线性运动约束系统的一种方法．所谓**运动约束**是指不仅系统质点的位置，而且它们的速度，加速度等也受到限制的约束．这种约束是经常出现的，如冰刀运动的速度只能沿刀方向的条件，又如圆球在粗糙水平面上无滑动地滚动的条件等等．运动约束的数学表示是微分方程，因此也叫**微分约束**．如果表示运动约束的微分方程是可积分的，则运动约束退化为**几何约束**，即**完整约束**，否则就有**非完整约束**．我们这里仅涉及一阶线性运动约束，即在约束条件中只出现速度，而且以线性方式出现．这时约束条件用广义坐标的一阶线性微分方程表示．

我们首先建立一阶线性运动约束系统的数学理论，然后作为特殊情形，得到相应的完整约束的数学问题．八十五年前 Poincaré 就研究了这个问题，并提出了力学方程的新形式[1]．这方程被Чetaев 誉为 Poincaré 的"美妙发现"之一[2]和"美妙的思想"[3]．Чetaев 本人[4]和不少其他学者[5−8]直到不久以前还在讨论 Poincaré 方程的推导方法以及它的各种推广．我们这里用不同的方法介绍这个理论．这个方法充分利用了前一章的一些概念．

我们约定：拉丁指标从 1 至 n 取值，小写希腊指标从 1 至 m ($<n$)取值，而大写希腊指标则从 $m+1$ 至 n 取值．重复指标按相应取值范围遵循求和约定．

为简单计，我们只考虑不受几何约束的质点组．设有 N 个质点(质量分别为 $m_1,\cdots,m_N$) 的力学系统．将各质点在笛卡儿系的坐标依次排列如下：$(x_1, y_1, z_1,\cdots, x_N, y_N, z_N)$，并改记为 $(q^1,\cdots,q^n)$，其中 $n=3N$．于是系统的质量矩阵 $[m_{ij}]_{n\times n}$ 是对角阵 $\mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1,\cdots, m_N, m_N, m_N)$．由于没有几何约束，增

广构形空间是 $\mathbf{E}^n\times\mathbf{R}$（不需用到内积）．设系统受到 $n-m$ 个一阶线性运动约束：

$$A_{\Phi s}\dot{q}^s+A_\Phi=0,\tag{1}$$

其中 $A_{\Phi s}$ 和 A_Φ 都是广义坐标 $\{q^i\}$ 和时间 t 的光滑函数：$\mathbf{E}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$．假设约束 (1) 已经化成为线性无关的，故可设 $\mathrm{rank}[A_{\Phi i}]=n-m$．

设 $(\xi_0^1,\cdots,\xi_0^n)$ 是线性方程组

$$A_{\Phi s}x^s+A_\Phi=0$$

的特解，而 $\{(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^n)|\alpha=1,\cdots,m\}$ 是齐次方程组

$$A_{\Phi s}x^s=0\tag{2}$$

的基本解组．这里 ξ_0^i 和 ξ_α^i 都是 $\{q^i\}$ 和 t 的函数．根据线性代数方程组的理论，(1) 的解，即满足运动约束 (1) 的广义速度 $\{\dot{q}^i\}$，必须有形式：

$$\dot{q}^i=\xi_0^i+\eta^\alpha\xi_\alpha^i.\tag{3}$$

单纯从满足约束的角度，$\{\eta^\alpha\}$ 可以是任何参数或函数组，要根据其他条件决定．从后面的分析来看，接受 η^α 是时间 t 的函数是合适的．这样，为了求系统的运动，除了 n 个广义坐标 $\{q^i(t)\}$，还要确定 m 个称为**速度特征**的函数 $\{\eta^\alpha(t)\}$．

在以 $\{q^1,\cdots,q^n,t\}$ 为坐标系的增广构形空间中，构造 $n-m$ 个微分 1-形式

$$\boldsymbol{\theta}_\Phi=A_{\Phi s}dq^s+A_\Phi dt\tag{4}$$

和 $m+1$ 个向量场

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}_0&=\frac{\partial}{\partial t}+\xi_0^i\frac{\partial}{\partial q^i},\\ \boldsymbol{X}_\alpha&=\xi_\alpha^i\frac{\partial}{\partial q^i}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

微分 1-形式组 (5) 是约束 (1) 的改写．据 (1) 的假设，(5) 是线性无关组．向量场组 (5) 中只有 $\boldsymbol{X}_0$ 中才出现基向量 $\partial/\partial t$，$\boldsymbol{X}_0$ 显然不能为其他 $\boldsymbol{X}_\alpha$ 表出；由于基本解组 $\{\xi_\alpha^i\}$ 是线性无关的，$\{\boldsymbol{X}_\alpha\}$ 也是线性无关的．因此，总起来，$\{\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_\alpha\}$ 是线性无关向量场组，

它在增广构形空间张成一个 $m+1$ 维的光滑分布 $\mathfrak{D}$. 容易看出

$$\xi_0^i = \boldsymbol{X}_0 q^i, \tag{6}$$

$$\xi_\alpha^i = \boldsymbol{X}_\alpha q^i. \tag{7}$$

对任意光滑函数 $f(q^1, \cdots, q^n, t)$，有

$$\boldsymbol{X}_0 f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \boldsymbol{X}_0 q^i, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{X}_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \boldsymbol{X}_\alpha q^i. \tag{9}$$

将 (6, 7) 代回 (3)，就有

$$\dot{q}^i = (\boldsymbol{X}_0 + \eta^\alpha \boldsymbol{X}_\alpha) q^i. \tag{10}$$

方程 (1) 可积等价于微分形式场 $\{\boldsymbol{\theta}_\Phi\}$ 恰当. 如果 $\{\boldsymbol{\theta}_\Phi\}$ 是恰当的，则 (IX. 7.40) 条件满足. 现在，由于

$$\boldsymbol{X}_0 \lrcorner \boldsymbol{\theta}_\Phi = (A_{\Phi s} dq^s + A_\Phi dt)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_0^i \frac{\partial}{\partial q^i}\right)$$

$$= A_{\Phi s} \xi_0^i dq^s \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) + A_\Phi = A_{\Phi s} \xi_0^s + A_\Phi = 0,$$

$$\boldsymbol{X}_\alpha \lrcorner \boldsymbol{\theta}_\Phi = A_{\Phi s} \xi_\alpha^i dq^s \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = A_{\Phi s} \xi_\alpha^s = 0,$$

Frobenius 定理对偶表述的条件 (IX. 7. 39) 满足. 因此，有结论：(1)是可积的，当且仅当分布 $\mathfrak{D}$ 是对合的：

$$[\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_\alpha], [\boldsymbol{X}_\alpha, \boldsymbol{X}_\beta] \in \mathfrak{D}.$$

由 (10)，有

$$\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \eta^\alpha} = \boldsymbol{X}_\alpha q^i. \tag{11}$$

在增广构形空间中，函数 $f(q^1, \cdots, q^n, t)$ 沿运动的变化率是

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i} (\boldsymbol{X}_0 + \eta^\alpha \boldsymbol{X}_\alpha) q^i$$

$$= (\boldsymbol{X}_0 + \eta^\alpha \boldsymbol{X}_\alpha) f. \tag{12}$$

特别地，取 q^i 为 f，又回到 (10) 式.

按 Appell-Четаев 的定义，**广义虚位移**应满足关系

$$A_{\Phi i} \delta q^i = 0, \tag{13}$$

因为$\{(\xi_\alpha^1,\cdots,\xi_\alpha^n)\}$，由(7)，即$\{(\boldsymbol{X}_\alpha q^1,\cdots,\boldsymbol{X}_\alpha q^n)\}$是(2)的基本解组，(13)的解，即广义虚位移，应有形式

$$\delta q^i = \omega^\alpha \boldsymbol{X}_\alpha q^i, \tag{14}$$

其中$\omega^1,\cdots,\omega^m$是t的任意函数。

下面从 D'Alembert 原理：

$$\left(m_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial V}{\partial q^i}\right)\delta q^i = 0 \tag{15}$$

推导问题的方程组．这里$V(q^1,\cdots,q^n,t)$是系统的**势能函数**．上式的广义虚位移δq^i不能是任意的，要满足条件(14)．将(14)代入(15)，考虑到$\{\omega^\alpha\}$的任意性，有

$$m_{ij}\ddot{q}^j \boldsymbol{X}_\alpha q^i + \frac{\partial V}{\partial q^i}\boldsymbol{X}_\alpha q^i = 0. \tag{16}$$

考虑到系统**动能**的表达式$T = \frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$，质量矩阵的对称性和(11)式，我们有

$$\frac{\partial T}{\partial \eta^\alpha} = \frac{1}{2}m_{ij}\left(\dot{q}^i\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \eta^\alpha} + \dot{q}^j\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \eta^\alpha}\right) = m_{ij}\dot{q}^j\boldsymbol{X}_\alpha q^i. \tag{17}$$

于是

$$\begin{aligned} m_{ij}\ddot{q}^j\boldsymbol{X}_\alpha q^i &= \frac{d}{dt}(m_{ij}\dot{q}^j\boldsymbol{X}_\alpha q^i) - m_{ij}\dot{q}^j\frac{d}{dt}(\boldsymbol{X}_\alpha q^i) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta^\alpha}\right) - m_{ij}\dot{q}^j\frac{d}{dt}(\boldsymbol{X}_\alpha q^i). \end{aligned} \tag{18}$$

以$\boldsymbol{X}_\alpha q^i$作为(12)式的$f$，又用$\boldsymbol{X}_\alpha$作用于(10)式两端，分别得

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{X}_\alpha q^i) = (\boldsymbol{X}_0 + \eta^\beta\boldsymbol{X}_\beta)(\boldsymbol{X}_\alpha q^i),$$

$$\boldsymbol{X}_\alpha\dot{q}^i = \boldsymbol{X}_\alpha((\boldsymbol{X}_0 + \eta^\beta\boldsymbol{X}_\beta)q^i).$$

考虑到 Lie 括号积的定义，两式相减给出[1]

---

1) 用到结果$[\eta^\beta\boldsymbol{X}_\beta,\boldsymbol{X}_\alpha] = \eta^\beta[\boldsymbol{X}_\beta,\boldsymbol{X}_\alpha] - (\boldsymbol{X}_\alpha\eta^\beta)\boldsymbol{X}_\beta$．证明如下：设$f\in\mathscr{F}(\mathbf{E}\times\mathbf{R})$，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathscr{X}(\mathbf{E}\times\mathbf{R})$，则$\forall g\in\mathscr{F}(\mathbf{E}\times\mathbf{R})$，有

$$\begin{aligned}[f\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]g &= f\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}g) - \boldsymbol{Y}(f\boldsymbol{X}) \\ &= f\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}g) - f\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}g) - (\boldsymbol{Y}f)\boldsymbol{X}g \\ &= [f[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] - (\boldsymbol{Y}f)\boldsymbol{X}]g.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(X_\alpha q^i) = [X_0 + \eta^\beta X_\beta, X_\alpha]q^i + X_\alpha \dot{q}^i$$

$$= ([X_0, X_\alpha] + \eta^\beta [X_\beta, X_\alpha] - (X_\alpha \eta^\beta) X_\beta) q^i + X_\alpha \dot{q}^i. \tag{19}$$

因为 η^β 只是 t 的函数,

$$X_\alpha \eta^\beta = \xi_\alpha^i \frac{\partial \eta^\beta}{\partial q^i} = 0. \tag{20}$$

考虑到 (20), 将 (19) 代回 (18), 再代回 (16), 我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta^\alpha}\right) - m_{ij}\dot{q}^j([X_0, X_\alpha] + \eta^\beta [X_\beta, X_\alpha])q^i - m_{ij}\dot{q}^j X_\alpha \dot{q}^i + \frac{\partial V}{\partial q^i} X_\alpha q^i = 0. \tag{21}$$

考虑到 (9) 和

$$X_\alpha T = X_\alpha \left(\frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j\right) = m_{ij} \dot{q}^j X_\alpha \dot{q}^i,$$

(21) 可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta^\alpha}\right) - m_{ij}\dot{q}^j([X_0, X_\alpha] + \eta^\beta [X_\beta, X_\alpha])q^i - X_\alpha (T - V) = 0. \tag{22}$$

引入 **Lagrange 函数** $L = T - V = \hat{L}(q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t)$. 通过 (10) 用 η^α 表达 $\dot{q}^i$, 得 $L = L(q^1, \cdots, q^n, \eta^1, \cdots, \eta^m, t)$, 并有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta^\alpha}\right) - X_\alpha L - m_{ij}((X_0 + \eta^\gamma X_\gamma)q^j)([X_0, X_\alpha] + \eta^\beta [X_\beta, X_\alpha])q^i = 0. \tag{23}$$

这就是 **Poincaré 方程.**

通常假设 Lagrange 函数是正则的, 即它的 Hesse 矩阵 $\text{Hess}\,\hat{L} := \left[\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right]$ 非退化:

$$\text{rank}(\text{Hess}\,\hat{L}) = n. \tag{24}$$

两次利用 Sylvester 不等式[1]，又有

$$\operatorname{rank}(\text{Hess } L) = m, \tag{25}$$

从而 $\text{Hess } L = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta}\right]$ 非退化．利用 (10)，并根据 (25)，方程 (23) 还可写成

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^\alpha = ((\text{Hess } L)^{-1})^{\alpha\beta}\Big\{&-\frac{\partial^2 L}{\partial \eta^\beta \partial q^i}(\boldsymbol{X}_0 + \eta^\gamma \boldsymbol{X}_\gamma)q^i - \frac{\partial^2 L}{\partial \eta^\beta \partial t}\\ &+ \boldsymbol{X}_\beta L + m_{ij}((\boldsymbol{X}_0 + \eta^\gamma \boldsymbol{X}_\gamma)q^i)([\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_\beta]\\ &+ \eta^\varphi[\boldsymbol{X}_\varphi, \boldsymbol{X}_\beta])q^j\Big\} = 0,\end{aligned} \tag{26}$$

它和 (10)

$$\dot{q}^i = (\boldsymbol{X}_0 + \eta^\alpha \boldsymbol{X}_\alpha)q^i \tag{27}$$

构成问题的完全方程组．这是一个由含未知函数 $q^i(t)$ 和 $\eta^\alpha(t)$ 的 $m+n$ 个具有典则形式的一阶常微分方程组成的方程组．除了广义坐标的 n 个初值 $q^i(0)$，还需要速度特征的 m 个初值 $\eta^\alpha(0)$．因为 (2) 的基本解组 $\{(\xi_\alpha^1, \cdots, \xi_\alpha^n)\}$ 是线性无关组，$\operatorname{rank}[\xi_\alpha^i] = m$．可从 (3) 取 m 个关系式，其系数矩阵对应于 $[\xi_\alpha^i]$ 的行列式不为零的 m 阶子阵，并由给出的初值 $q^i(0)$ 和 $\dot{q}^i(0)$ 表出 $\eta^\alpha(0)$．例如，当 $\det[\xi_\beta^\alpha] \neq 0$，则可取 (3) 的前 m 个关系式

$$\dot{q}^\alpha = \xi_0^\alpha + \eta^\beta \xi_\beta^\alpha,$$

并得

$$\eta^\alpha = \overset{-1}{\xi}{}_\beta^\alpha(\dot{q}^\beta - \xi_0^\beta), \tag{28}$$

从而有 $\eta^\alpha(0)$．这样，我们就最终地建立了一阶线性运动约束系统的**初值问题**．

如果系统的约束 (1) 是完整的，则根据分布 $\mathfrak{D}$ 的对合性，有

$$[\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_\alpha] = C_{0\alpha}^0 \boldsymbol{X}_0 + C_{0\alpha}^\beta \boldsymbol{X}_\beta,$$
$$[\boldsymbol{X}_\alpha, \boldsymbol{X}_\beta] = C_{\alpha\beta}^0 \boldsymbol{X}_0 + C_{\alpha\beta}^\gamma \boldsymbol{X}_\gamma.$$

---

1) Sylvester 不等式：
$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leqslant \operatorname{rank}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$，
其中 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times l$ 矩阵．可参考 Гантмахер, Ф. Р., Теория Матриц, Гостехиздат, Москва, 1953.

利用 Lie 括号积分量公式（IX. 2.10）可得，$C^0_{0\alpha}=0$，$C^0_{\alpha\beta}=0$。于是，(1) 是完整约束的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_\alpha]&=C^\beta_{0\alpha}\boldsymbol{X}_\beta,\\ [\boldsymbol{X}_\alpha,\boldsymbol{X}_\beta]&=C^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{X}_\gamma\qquad(C^\gamma_{\alpha\beta}=-C^\gamma_{\beta\alpha}),\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

其中各系数 $C^\beta_{0\alpha}$，$C^\gamma_{\alpha\beta}$ 是 $\{q^i\}$ 和 t 的函数. 考虑到

$$m_{ij}\dot{q}^j(C^\gamma_{0\alpha}+\eta^\beta C^\gamma_{\beta\alpha})\boldsymbol{X}_\gamma q^i=(C^\gamma_{0\alpha}+\eta^\beta C^\gamma_{\beta\alpha})\frac{\partial T}{\partial\eta^\gamma},$$

我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\eta^\alpha}\right)-(C^\gamma_{0\alpha}+\eta^\beta C^\gamma_{\beta\alpha})\frac{\partial L}{\partial\eta^\gamma}-\boldsymbol{X}_\alpha L=0,\tag{30}$$

或

$$\dot{\eta}^\alpha=((\mathrm{Hess}\,L)^{-1})^{\alpha\beta}\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^\beta\partial q^i}(\boldsymbol{X}_0+\eta^\gamma\boldsymbol{X}_\gamma)q^i-\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^\beta\partial t}\right.$$
$$\left.+(C^\gamma_{0\beta}+\eta^\varphi C^\gamma_{\varphi\beta})\frac{\partial L}{\partial\eta^\gamma}+\boldsymbol{X}_\beta L\right].\tag{31}$$

(27) 和 (31) 联立就构成完整约束系统的方程组. 可以类似地建立初值问题.

第 X 章 参考文献

[1] Poincaré H., Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **132**(1901) 369—371.

[2] Četajev N., Sur les équations de Poincaré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **185**(1927) 1577—1578.

[3] Четаев Н. Г., Sur les équations de Poincaré, *Докл. АН СССР-А*, **7**(1928) 103—104

[4] Четаев Н. Г., Об уравнениях Пуанкаре, *ПММ* **5**(1941) 253—262.

[5] Фам Гуен, Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре-Четаева, *ПММ*, **31**(1967) 253—259; **32** (1968) 804—814.

[6] Ghori Q. K. & Hussian M., Poincaré equations for nonholonomic dynamical systems, *ZAMM* **53**(1973) 391— 396.

[7] Ghori Q. K. & Hussian M., Poincaré equations for a nonholonomic system with variable masses, *Arch. Rat. Mech. Analysis*, **56**(1974) 70—78.

[8] Ghori Q. K., Conservation Laws for dynamical systems in Poincaré-Četaev variables, *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 64(1977) 327–337.

全书参考书目

[1] Green, A. E., Zerna, W., Theoretical Elasticity, Clarendon Press, Oxford (1954).

[2] Gołąb, S., Rachunek Tensorowy, PWN, Warszawa (1956).

[3] Sokolnikoff, I. S., Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York (1956).

[4] Truesdell, C., Toupin, R. A., The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin (1960).

[5] Truesdell, C., Noll, W., The Non-linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Bd. III/3, Springer-Verlag, Berlin (1965).

[6] Boothby, W. M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Acad. Press, New York (1975).

[7] Bowen, R. M., Wang, C.-C., Introduction to Vectors and Tensors, Vol. 1, 2, Plenum Press, New York (1976).

[8] Dodson, C. T. J., Poston, T., Tensor Geometry, Pitman, London (1977).

[9] Klingenberg, W., A Course in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York (1978).

[10] 郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社，北京(1980).

[11] Gurtin, M. E., An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York (1981).

[12] Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T., Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Addison-Wesley, Reading (1983).